PLANOMETRIA

DEL PROFESSORE

FERDINANDO DE LUCA.

Geometria Piana.

NAPOLI 1815.

Nella Stamperia dell' Istituto Politecnico Militare
Diretta da Lodovico Sangiacomo

Con permesso.

GEOMETRIA PIANA.

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA.

1. La Geometria, non è, come l'indica lo stesso vocabolo, che la misura della Terra e dell'esteso. Appena l'estensione dell'umana famiglia fu tale da non poter più vivere in comunione negativa, si sentì tosto la necessità di venire a divisioni, e di stabilire certi limiti alle terre, onde soddisfare i bisogni o di una, o di più famiglie. Si sentì anche generalmente il bisogno di marcare le diverse parti del tempo, e'l più naturale, per ciò eseguire, fu quello di segnare il il ritorno periodico, e'l sito degli astri, e de' pianeti, che si presentavano a prima vista. Fu questa l'origine della Geometria, e sotto questo solo riguardo la possedevano gli antichi Caldei, ed Egiziani. Ma le arti divenute un bisogno, si sentì anche la necessità di descrivere, e di paragonare diverse quantità, ed è allora propriamente, che la Geometria estesa ad oggetti di grande importanza, e portata al di là de' stretti limiti, ov'era rinchiusa, divenne una scienza.

Un'occhiata alla natura, e tutto sembra di renderci persuasi a farci riguardare lo spazio, come il luogo de' corpi. Ma lo spazio come penetrabile, ed immobile non non ha verùna forma, e non è che in virtù delle parti di questo spazio

considerate come penetrabili, ed immobili, che noi ci facciamo l' idea del moto: or non v' è moto, senza che gli oggetti che si muovono siano impenetrabili, ed occupino per conseguenza differenti parti di questo spazio; è dunque l'impenetrabilità quella che ci fa distinguere lo spazio da'corpi rinchiusi in esso, di cui ne limitano una parte. Noi siamo naturalmente portati a distinguere due sorti di esteso, uno impenetrabile, e l' altro, che costituisce il luogo de' corpi. Così benchè l' impenetrabilità entra necessariamente nell' idea che ci formiamo delle parti della materia; pure non essendo che una idea relativa nata dal confronto di due quantità, noi ci avezziamo a riguardarla come distinta dallo spazio. Una tal considerazione non ci rappresenta le quantità che come parti figurate, ed estese dello spazio, e la determinazione della forma, e della grandezze di essi non consiste, che a trovare la figura, e la gran dezza de'limiti, che possono darsi allo spazio. Or quest' appunto è quello, che chiamasi estensione, quella che forma l' oggetto della Geometria. La Geometria dunque non ha altro oggetto, che di misurare l'estensione, cioè di determinare la configurazione, e la grandezza de'diversi limiti, che può avere lo spazio.

2. Ma questi limiti possono variare di forma, giacchè possiamo concepire una estenzione dello spazio o limitata tra due soli punti, o racchiusa tra limiti di sola lunghezza, o tra limiti di lunghezza, e larghezza. Chiamiamo linea l' estenzione limitata da due punti, superficie quella racchiusa tra linee, e solido quella racchiusa tra superficie.

Dunque il solido ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità, ed i suoi limiti se-

no le superficie; la superficie ne ha due solamente lunghezza e larghezza, ed i suoi limiti sono le linee; e finalmente la linea non ha che la sola lunghezza, i cui limiti sono punti, i quali vengono perciò concepiti come segn' indivisibili privi di ogni dimensione.

3. Egli è evidente, che queste diverse specie di limiti non possono esistere separatamente: intanto, astraendo, le consideriamo isolate col pensiere. La più semplice di tutte le linee, che ci si presenta sotto l'analisi de' limiti è quella, che noi possiamo imaginare generata dallo scorrere di un punto, il quale tende sempre verso di un altro per la medesima direzione: questa è la linea retta; ogni altra linea diversa da essa si chiama curva.

Quindi segue, ch' essendo la linea retta uniforme in tutte le sue parti non ha, che una sola posizione tra due punti. Dunque 1. *tra due punti non si può menare, che una sola linea retta*, 2. *la retta è la più corta, è la più semplice di quelle, che sono tra gli stessi limiti*; dal che ne siegue 3. *che la retta misura la distanza tra due punti.*

4. Nello stesso modo, che si è considerata la retta generata dal moto di un punto, seguendo sempre la stessa direzione, possiamo concepire, che la superficie piana venghi generata dal movimento di una retta la quale, fissa ne' suoi estremi, si muove comunque secondo la primitiva direzione. Ogni altra superficie di genesi diversa dicesi superficie curva.

Da ciò s' inferisce, che su di una superficie piana si può sempre adattare una retta in tutt' i sensi, la qual cosa non può aver luogo sulla superficie curva.

5. Noi abbiamo considerato le linee, le superficie, ed i solidi come parti dello spazio comprese tra certi limiti. Ma come discernere se vi è, o nò differenza trà queste diverse parti limitate dello spazio? I Geometri hanno creduto non esservi miglior mezzo per discernere l'eguaglianza, o disuguaglianza di esse, che di soprapporre l'una all'altra, affin di osservare, se combaciano o no; nel primo caso è chiaro che saranno eguali, e nel secondo diseguali o equivalenti. Quindi essi ne hanno rilevato il principio di *soprapposizione*, il quale benchè sembra a primo aspetto un principio meccanico; nondimeno è stato riconosciuto per Geometrico, e rigoroso. Il principio dinotato è il seguente; *due parti dello spazio, che combaciano, sono eguali.*

Segue da tutto ciò, che siccome noi conosciamo l'eguaglianza di due parti limitate dello spazio dal vedere, che posta l'una sull'altra, esse combaciano, così parimente veniamo a determinare la differenza di esse, allorchè sono diseguali, applicando cioè la minore sulla maggiore, e rapportandone la differenza ad una unità di misura, la quale bisogna che sia costante, per aver delle misure di paragone. Il rapportare poi le grandezze a questa unità di misura costante, è ciocchè dicesi generalmente *misurare.*

6. Allorche noi conosciamo le rispettive distanze di due o più parti limitate dello spazio da altre date, ne sappiamo la di loro posizione.

Ciò posto, cominciano dal concepire la posizione di più punti esistenti su di una superficie piana riguardo ad un altro punto dato.

L'idea la più semplice, che possiamo formarci della distanza d'infiniti punti, e del loro sito rispetto ad un altro punto fisso è quella di conce-

pire tutti quegl' infiniti punti esistenti su di una superficie piana ad egual distanza da quel punto fisso. Se concepiamo questi punti vicini l'uno all'altro, e disposti in modo che formino quasi una quantità continua, questa idea ci manudurrà a quella di una curva, che ritorna in se stessa, serbando in tutt'i suoi punti sempre egual distanza da tal punto fisso preso dentro di essa. È questa la curva circolare la più semplice nella sua natura, e che perciò è l' unica, che si considera negli elementi di Geometria piana. La porzione della superficie piana, ch' essa racchiude, chiamasi *cerchio*, e la curva dicesi *circonferenza circolare*. I Geometri la considerano divisa in 360 gradi, o secondo la divisione contigrada adottata da francesi in 400 gradi, suddividendo nel primo caso i gradi in 60 minuti primi, questi in 60 secondi; ec e per la divisione centigrada, in 100 minuti primi, e questi in 100 secondi ec. Quel punto, da cui tutti gli altri debbono avere egual distanza vien chiamato *centro*, e quelle distanze eguali, che tutt'i punti della circonferenza serbano dal centro, diconsi *raggi*. Una retta, che, segando il cerchio, resta intercetta dall' una, e l'altra parte tra la circonferenza, chiamasi *diametro*, se passa pe'l centro, e *corda*, se sega comunque la circonferenea: egli è chiaro da ciò, che il diametro divide il cerchio in due parti eguali, laddove una corda lo divide iu due parti diseguali, che chiamansi *segmenti*, o *porzioni* di cerchio, e che trovansi racchiuse tra una parte della circonferenza maggiore, o minore della semicirconferenza, e la corda corrispondente: questa parte della circonferenza, che corrispondente ad una corda chiamasi *arco*. Finalmente vien conosciuto sotto nome di *settore circolare* quella

parte della superficie del cerchio racchiusa tra due raggi, e l'arco, ch'essi tagliano.

Dietro tutto ciò noi possiamo definire il cerchio *una superficie piana racchiusa da una curva, la quale torna in se stessa, ed ha un punto dentro di essa equidistante da qualsivoglia punto della curva;* e possiamo concepirlo generato da una retta, la quale fissa in un punto compie una perfetta rivoluzione su di una superficie piana.

GEOMETRIA PIANA.

CAPO I.

Dell'inclinazione di due rette.

7. Dalla genesi della curva circolare è agevole di passare alla considerazione di due rette che s' inclinano tra loro, giacchè se noi concepiamo su di una retta AB distesa un' altra retta AB' la quale fissa nel punto A giri sul piano ABB', dopo un tempo qualunque di questa rivoluzione, la retta AB' si troverà inclinata all' altra AB. Questa inclinazione scambievole delle due rette AB, AB' sullo stesso piano è ciocchè chiamasi *angolo*. Le due rette AB, AB', che s' inclinano, si chiamano lati dell' angolo BAB', e'l punto A dicesi vertice. Quest' angolo, che noi consideriamo formato su di un piano, dicesi *angolo piano*, e si nomina l' angolo BAB', o pure l' angolo in A. Fig. 1

Quindi poicchè le due linee AC, AC' hanno la medesima inclinazione tra loro, che le altre AB, AB', delle quali le due prime sono parti rispettivamente, ne segue, che l' angolo CAC' è lo stesso che l' angolo BAB', e che per conseguenza la grandezza di un angolo non dipende punto dalla maggiore, o minore lunghezza de' suoi lati.

8. L' idea dell' angolo essendo precisamente quello, che nasce da due linee, che s' incontrano, ne segue che noi possiamo riguardar l' angolo, e circa la qualità delle linee, che lo formano, e rispetto al modo d' inclinazione delle medesime linee. In-

fatti possono inclinarsi due rette, due curve, una retta, ed una curva; e possono inclinarsi in maniera, che una non inclini nè più a destra, nè a sinistra dell'altra, o pure che inclini più da una parte, che dall'altra. Secondocchè s'inclinano due rette, due curve, una retta, ed una curva, l'angolo si dirà *rettilineo*, *curvilineo*, *mistilineo*, benchè impropriamente, giacchè le parole *rettilineo* ec. non riguardano l'angolo, ma le linee, che lo formano. L'angolo poi formato da due linee, che s'incontrano in modo, che una non inclini su dell'altra nè più a destra, nè a sinistrà, dicesi *retto*, siccome se l'incontro è tale, che una linea inclina più da una parte, che dall'altra, prolungata una di queste linee d'ambe le parti, ne sorgerano due angoli, de' quali uno si chiamerà *acuto*, e sarà il minore, e l'altro *ottuso*, e sarà il maggiore.

Le linee, che formano un angolo retto, diconsi *perpendicolari* l'una all'altra; altrimenti diconsi *obblique*.

Dunque *la perpendicolare non ha che una sola posizione riguardo la retta, che incontra perpendicolarmente, giacchè in un sito solo una retta non inclina più a destra, o a sinistra.* Quindi. 1. *la sola perpendicolare misura la distanza di un punto da una retta: 2. per un punto non può passarvi, che una sola perpendicolare: 3. tutti gli angoli retti sono eguali; l'acuto è minore del retto, e l'ottuso n'è maggiore.*

Se due angoli insieme presi valgono un angolo retto, uno chiamasi complemento dell'altro e se insieme valgono due retti, uno si dirà supplemento dell'altro.

In questa istituzione di Geometria non ci occuperemo, che de' soli angoli rettilinei.

9. Spingiamo più oltre l'analisi dell'angolo. Allorchè la retta AB' sulle prime combaciando con AB gira intorno al punto A sempre sullo stesso piano, qualunque inclinazione essa avrà acquistata rispetto ad AB, saranno sempre eguali le rette AB, AB', dunque la linea BB' descritta dal punto B' sarà un arco di cerchio, di cui A n'è il centro (6); e poicchè l'arco BB' cresce, o diminuisce a misura, che cresce o diminuisce l'angolo BAB', ne viene che tra l'angolo BAB', e l'arco BB', il cui centro è in A vertice dell'angolo, vi è un'analogia così intima, che naturalmente ci porta a prendere questo secondo per misura del primo. Supponiamo dippiù che AB' giri sullo stesso piano dall'altra parte di AB descrivendo un angolo BAB'' eguale a BAB', sarà, per ciocchè si è detto, l'arco $BB'=BB''$; ora essendo eguali le rette AB, AB', AB'' come raggi di uno stesso arco $B'BB''$, ed essendo parimenti eguali tanto gli angoli BAB', BAB'', quanto gli archi BB', BB'', se supponiamo il settore BAB' soprapposto al settore BAB'', BB' combacerà con BB''(5), l'angolo BAB' coll'altro BAB'', AB' con AB''; e quindi congiunte le corde BB', BB'' e generalmente un punto qualunque O co' punti B', B'', combaceranno ancora le corde BB', BB'', che si trovano distese tra punti B, B'; B, B'', i quali combaciono (5), e combaciando i punti O e B' co' punti O, e B'', combaceranno ancora le rette OB', OB'' (5), che uniscono i lati eguali AO, AB'; AO, AB'' de' due angoli eguali $B'AO$, $B''AO$. Sicchè

1.° *Angoli eguali, che poggiano i loro vertici al centro di una stessa circonferenza, e*

quindi di circonferenze eguali tagliano co' loro lati archi eguali.

2.° *Le corde, che sottendono questi archi sono ancora eguali.*

3.° *Le rette, che congiungono lati eguali di due angoli eguali, sono eguali.*

10. Se supponiamo l'arco $BB'=BB''$, è chiaro, Fig. 1 per ciocchè si è detto (9), che sarà anche l'angolo $BAB'=BAB''$: dippiù combaceranno questi archi (5), e cadendo il punto B' sul punto B'', e'l punto B combaciando con se stesso, come anche un punto qualunque O con se stesso, condotte le corde BB', BB'', o da uno stesso punto O due rette qualunque OB', OB'', combacerà ancora BB' con BB'' (3), ed OB' con OB'', e quindi sarà $BB'=BB''$, ed $OB'=OB'$ (5). Finalmente se supponiamo la corda $BB'=BB''$, o pure la retta $OB'=OB''$, esse combaceranno (5); e quindi combaciando i punti B, B' co' punti B, B'', o i punti O, B' co' punti O, B'', se uniremo le rette AB', AB'', queste dovranno ancora combaciare, perchè distese tra' limiti AB', AB'', che rispettivamente combaciano (3); sarà perciò l'angolo BAB' compreso da due di esse eguale all'angolo BAB'' compreso dalle due altre (7) e quindi sarà parimente l'arco $BB'=BB''$

Dunque generalmente gli angoli BAB', BAB'', *gli archi* BB', BB'' *descritti collo stesso raggio, le corde* BB', BB'', *che sottendono questi archi, o due distanze qualunque* B'O, B''O *de' punti* B', B'' *da uno stesso punto* O *preso sulla retta fissa* AB *hanno tal nesso tra di loro, che l'egualità degli uni seco porta quella degli altri.*

Queste verità, che abbiamo dimostrate ci

mettono nello stato di sciogliere i seguenti problemi.

11. *Costruire ad un punto* b *di una retta* db *un angolo eguale ad un angolo dato* ABC. Fig. 2

Supponiamo sciolto il problema, e che si fosse costruito un angolo *dbe* eguale all' angolo *ABC*; allora descritti con raggi eguali, e co' centri rispettivi *b*, *B* due archi *dfe*, *DFE* intercetti tra lati degli angoli, e tirate le corde *de*, *DE*, tanto quelli, che queste saranno rispettivamente eguali (9, 10): quindi il problema si riduce a formare collo stesso raggio due archi *DE*, *de* eguali; allora congiungendo il punto *b* col punto *e*, sarà *dbe* l' angolo cercato. A tal effetto si descriva col centro *b*, e col raggio *bd* un arco *dek*; indi col centro *B*, e collo stesso raggio, descritto un arco *DFE*, si congiunga *DE*; di poi col centro *d*, e col raggio *DE* si descriva un altro arco *geh*, che taglia il primo nel punto *e*; si unisca il punto *b* col punto *e*; egli è chiaro che sarà l' angolo $dbe = DBE$. Infatti, congiunta *de*, sarà questa eguale alla corda *DE* per costruzione; quindi, essendo ancora eguali i lati degli angoli *DBE*, *dbe* per costruzione, l' arco *dfe* sarà eguale all' arco *DFE*, e l' angolo *dbe* eguale all' altro *DBE* (10).

12. *Dividere per metà un angolo rettilineo dato* ABC. Fig. 3

Supponiamolo diviso in realtà per mezzo di una retta *BK*; allora se prendiamo ne' lati *BA*, *BC* due punti *D*, ed *E* egualmente distanti dal vertice *B*, saranno eguali le rispettive distanze *DO*, *EO* di questi punti da un punto *O* preso nella *BK* (10); dunque all' opposto se noi determiniamo un punto *O*, che serbi egual distanza da due punti *D*, *E* equidistanti da *B*, congiugnendo

il punto B col punto O, la retta BO dividerà l'angolo ABC per metà. A tal'effetto col centro B, e con un raggio BD a piacere si descriva un arco DE, il quale taglierà da' lati AB, BC le due rette BD, BE eguali; di poi co' centri D, ed E, e con uno stesso raggio si descrivano due archi gf, hi, che si seghino in un punto O: sarà questo il punto richiesto, che congiunto con B, farà restar bisegato l'angolo ABC. Infatti il punto O per costruzione serba egual distanza de' punti D, ed E, ed essendo ancora BD, BO rispettivamente eguali a BE, BO, sarà l'angolo $DBO=EBO$ (10).

Poichè gli angoli DBm, EBm sono eguali, sarà ancora l'arco $Dm=Em$, ed all'opposto, se l'arco Dm fosse eguale all' arco mE, sarebbe, per ciocchè si è detto di sopra, l'angolo $DBm=EBm$. Dunque *la divisione dell' angolo in due parti eguali seco porta anche la divisione per metà di un arco compreso tra suoi lati. e viceversa. E generalmente la divisione di un angolo in un numero qualunque di parti eguali, porta alla divisione dell' arco, che lo misura nello stesso numero di parti eguali, ed all' opposto.*

13. Essendo l'angolo DBN eguale all' angolo EBN, ed essendo dippiù $BD=BE$, saranno eguali le due rette ND, NE, che congiungono i lati eguali DB, BN; EB, BN, de' due angoli eguali DBN, EBN (10); quindi il problema di dividere una retta per metà dipende da quello di dividere per metà un angolo rettilineo. Perciò, se si domanda dividere DC per metà, si descrivono co' centri D, ed E e con uno stesso raggio due archi, che si seghino in un punto B; indi, unite le DB, BE, si divida per metà l'angolo DBE; sarà, per ciocchè qui sopra si

è detto, $DN=NE$. Infatti le due rette DN, NE uniscono i due lati eguali DB, BN, EB, BN de' due angoli eguali DBN, EBN; quindi esse saranno eguali (9); e perciò la retta BN è rimasta divisa per metà in N.

14. Poicchè sono eguali le due rette BD, BE, che uniscono i lati rispettivamente eguali DN, NB; EN, NB degli angoli BND, BNE, eguali saranno ancora questi angoli, e perciò retti, e la BN sarà perpendicolare sopra DE: dunque *una retta* BN, *che passa per un punto* B *equidistante dagli estremi* D, *ed* E *di un' altra retta* DE, *e per la metà di questa sarà ad essa perpendicolare.*

Per la stessa ragione, essendo il punto O equidistante da' punti D, ed E e'l punto N metà di DE, sarà ON perpendicolare su di DE: ma pe'l punto N non vi può passare, che una sola perpendicolare (8); dunque, BO sarà una sola retta: e quindi potremo dire generalmente, che *una retta, che passa per due punti* B, O *equidistanti rispettivamente dagli estremi* D, E *di un altra retta* DN, *sarà a questa perpendicolare.*

Da questi principj possiamo tirare la soluzione de' due seguenti problemi.

15. *Dato un punto* N *nella retta* PQ *indefinita, si vuole da questo punto innalzare una perpendicolare.*

Supponiamo sciolto il problema, e che la perpendicolare richiesta sia BN: allora presi due punti D, E equidistanti da N, dovrà essere $BD=BE$ (14); quindi all'opposto, ritrovando un punto B equidistante da D, ed E presi ad egual distanza da N, ed unendo il punto N col punto B sarà la NB la perpendicolare richiesta. A tal

effetto col centro N, e con un raggio a piacere si descriva un cerchio, che tagli la PQ ne' punti D ed E: dipoi co' centri D, ed E, e con un raggio maggiore di DN, si descrivano due archi, che si segano in un punto B; sarà questo il punto richiesto, che unito col punto N, ne farà risultare BN perpendicolare a DE. Infatti la retta BN passa pe' punti B, N equidistanti rispettivamente dagli estremi D, ed E della retta DE.

16. *Da un punto* B *esistente fuori di una retta* PQ *indefinita si vuole abbassare su di questa una perpendicolare.*

Supponendo il problema sciolto, e che la perpendicolare richiesta sia BN, i punti B, ed N dovranno rispettivamente trovarsi ad egual distanza da due punti D ed E della retta PQ: quindi resterà sciolto il problema: determinando due punti D, ed E, in modo che sia $BD=BE$, e $DN=NE$. A tal effetto preso un punto F dall' altra parte della retta PQ, col centro B, e col raggio BF si descriva un arco DFE, che taglia la PQ ne' punti D, ed E, sarà $BD=BE$; allora si divida DE per metà in N, e per essere ancora $DN=NE$, la BN, che passa pe' punti B, ed N equidistanti rispettivamente da' punti D, ed E, sarà la perpendicolare richiesta (14).

16. Poicchè la perpendicolare ad una retta dee passare per due punti, che sono rispettivamente ad egual distanza dagli estremi di essa; ma tra due punti non vi si può menare, che una sola linea retta; dunque *ogni punto dalla perpendicolare ad una retta serba egual distanza dagli estremi di questa.*

17. Quindi se da un punto B si menino su di una retta DE una perpendicolare BN, e varie obblique BD, BP sulla stessa prolungata ec.,

poicchè dee essere insieme $BD=BE$, ed $EN=DN$, ne segue, *che le obblique eguali menate da questo punto sulla* DE *si allontaneranno egualmente dal piede della perpendicolare, ed all' opposto.*

18. Dunque, divise per metà le due rette DN, DP ne' punti p, ed s, ed elevate da questi le perpendicolari pR, sT, se si congiungano le rette RN, TD; sarà $RN=RD$ (16) e quindi $DB=NR+RB$; ma è $NR+RB$ maggiore della retta BN(5), colla quale è racchiusa fra gli stessi limiti; sicchè sarà anche DB maggiore di BN: per la stessa ragione, essendo $PT=TD$, sarà $PB=DT+TB$; ma è $DT+TB$ maggiore di BD colla quale ha gli stessi limiti: sicchè sarà anche PB maggiore di DB: e proseguendo in simil guisa a ragionare ne conchiuderemo, *che di tutte le rette menate da un punto preso fuori di una retta su di questa, la perpendicolare è la minima, e l' obblique, che più si discostano dalla perpendicolare sono maggiori di quelle, che più vi si avvicinano.*

19. Eleviamo dal punto B una perpendicolare Fig. 4. BH, gli angoli ABH, CBH saranno ambidue retti: indi meniamo dallo stesso punto B una qualunque obbliqua BE; si osserverà, che se dall'angolo EBA se ne tolga l' angolo EBH, rimarrà l'angolo retto ABH; e se l' angolo tolto EBH si aggiunga all' angolo EBC, si avrà un altro angolo retto HBC: dunque i due angoli EBA, EBC insieme presi formeranno due angoli retti; dal che ne conchiuderemo, che *se una retta cade su di un altra, gli angoli adiacenti, che formerà con essa o sono retti, o insieme presi equivalgono a due retti.*

20. Si prolunghi EB verso E'; cadendo su di

EE' una retta *AB*, sarà la somma degli angoli *ABE*, *ABE'* eguale a due retti (19) ma anche la somma degli angoli *ABE*, *EBC* è eguale a due retti; dunque la prima somma eguaglierà la seconda, sicchè toltovi di comune l'angolo *EBA*, rimarrà l' angolo *EBC*=*ABE'*: similmente si dimostrerà l' angolo *ABE*=*CBE'*.

I due angoli *EBA*, *ABC* chiamansi angoli conseguenti; ed uno dicesi supplemento dell' altro; e gli angoli *CBE*, *ABE'*; *ABE*, *CBE'*, chiamansi rispettivamente angoli opposti al vertice, o semplicemente angoli *verticali*. Dunque *se due rette si tagliano, gli angoli conseguenti saranno o retti, o pres' insieme eguali a due retti, e gli angoli verticali saranno eguali fra loro.*

21. Poichè anche gli angoli *E'BA*, *E'BC* sono eguali a due retti; i quattro angoli *EBA*, *EBC*, *E'BA*, *E'BC* equivaleranno a quattro retti. Dunque *la somma di tutti gli angoli fatti in un punto equivale a quattro retti.*

22. Quindi se sul piano *AEC* giri intorno al punto *B* una retta *BE*; tutti gli angoli al punto *B* saranno misurati dalla circonferenza circolare descritta dal punto *E* (8); ma questi angoli equivalgono a quattro retti; dunque *una circonferenza circolare misura quattro retti.*

Ne segue da ciò che l' angolo retto sarà di 90°, o 100°, secondochè la circonferenza si divide in 360°, o 400 gradi.

23. Meniamo una retta *BD*, che non formi con *AB* una sola linea; e prolunghiamo *AB* verso *C*; egli è chiaro, che se gli angoli *EBA*, *EBD* fossero eguali a due retti; poicchè, da ciocchè abbiamo dimostrato, gli angoli *EBA*, *EBC* sono eguali a due retti, dovrebbe esser la somma de-

gli angoli EBD, EBA eguale alla somma degli EBC, EBA, ossia l'angolo $EBD=EBC$, il che è impossibile per essere EBD parte di EBC: dunque le sole rette AB, BC, che formano una sola retta continuata possono formare con una retta BH o BE menata dal punto B, ov' esse s' incontrano, due angoli o retti, o eguali a due retti. Sicchè *se dall' estremo di una retta si tirino per direzioni opposte due altre rette, che formano colla prima due angoli supplementi l' uno dell' altro, queste formeranno una sola retta continuata.*

24. Segue d[illegible] che se da un punto B della retta EE' menia[illegible] per direzioni opposte due altre rette BA, BC, e che dippiù siano eguali due angoli verticali EBC, ABE', poichè, aggiunto loro di comune l' angolo EBA, è la somma degli angoli EBC; EBA eguale all' altra EBA ABE', siccome questa seconda somma equivale a due retti (19) anche a due retti sarà eguale la somma degli angoli EBA, EBC, e quindi AB farà una sola retta continuata con BC (23). Dunque *se ad uno stesso punto di una retta cadano due altre rette per direzioni opposte, in modocchè gli angoli opposti al vertice riescano eguali, tali rette formeranno una sola retta continuata.*

CAPO II.

Delle rette parallele.

25. Cominciamo a dare qualche condizione a due rette, che abbiamo nel capo precedente considerate comunque situate su di un piano. Supponiamo dunque che una retta CD passi per due punti E, H situati dalla stessa parte, ed e[illegible] - Fig. 5

distanti dalla retta AB; saranno allora eguali le perpendicolari EF, HG, che misurano queste distanze (8): si supponga dippiù che una porzione CH della retta CD vad' a distendersi sull' altra parte HD; allora il punto E dovrà ritrovarsi in un' altro punto E', e quindi dovendo esso serbare da AB la stessa distanza, che vi serba il punto H, sarà ancora la perpendicolare $E'F'=HG=EF$; e sempre così procedendo, si vedrà, che tutt'i punti della CD condizionata a passare per due punti E, H situati dalla stessa parte, ed equidistanti da AB, dovranno ancora serbar sempre la medesima distanza dalla stessa retta AB.

La retta CD, che ha tutt' i suoi punti equidistanti da AB dicesi parallela ad essa; e la condizione per esser tale è di dover passare per due punti, che serbano da AB egual distanza.

26. *Dunque due rette parallele prolungate comunque non s' incontreranno giammai ed all' opposto.*

Dippiù le perpendicolari, che si menano fra due rette parallele, saranno eguali.

27. Poicchè dal punto F non si possono abbassare su di CD due perpendicolari distinte, che vadano ad incontrare rispettivamente due punti E, H (8), ne segue, che due perpendicolari innalzate su di una retta nello stesso piano da due punti distinti non potranno giammai incontrarsi; dunqu' esse saranno parallele (26); e perciò *se due rette sono perpendicolari ad una terza saranno parallele tra di loro.*

Fig 6 28. Quindi se sulla retta HN meniamo le due perpendicolari MF, AB, queste dovranno esser parallele; or perchè la somma degli angoli FHN, HNB formati dalle due rette parallele colla retta HN, che ambe le incontra, è eguale a due ret-

ti, cerchiamo di verificare, se menando una retta comunque KE, che taglia su di un piano due altre rette MF, AB, la supposizione degli angoli FHC, HCB eguali a due retti sia una condizione, che ci mena ad una conseguenza generale sul parallelismo delle due rette MF, AB. A tal effetto supponiamo per poco, che, stante la supposizione de' due angoli FHC, HCB eguali a due retti, le rette AB, MF non siano parallele; in tal caso prolungate si dovranno incontrare: sia O il punto, ov' esse s' incontrano, e prolungata CA verso P, si tagli $CP=HO$, prendendo C per centro ed HO per raggio; indi si unisca HP. Allora essendo per supposizione l'angolo HCB supplemento dell' angolo OHC; ma questo stesso angolo è supplemento dell' angolo HCP (19); dunque sarà $OHC=HCP$; ma è ancora $HO=CP$, ed HC di comune; dunque saranno parimenti eguali i due lati (10) OC, PH, che uniscono rispettivamente i lati eguali OH, CH; PC, CH de' due angoli eguali OHC, PCH; per conseguenza sarà la somma delle due rette PH, HO eguale alla retta PO, che ha con esse uno stesso limite, il che essendo un assurdo (3), è un assurdo ancora, che nell' ipotesi de' due angoli OHC, HCB eguali a due retti, le rette AB, MF non siano parallele.

Gli angoli FHC, HCB si chiamano angoli interni posti dalla stessa parte. Dunque *se due rette formano con un' altra retta, che le sega su di un piano gli angoli interni posti dalla stessa parte eguali a due retti, tali rette saranno parallele.*

29. Supponiamo ora l' angolo KHF eguale all' angolo HCB, sarà, aggiunto lor di comune l' angolo FHC, la somma degli angoli KHF,

FHC eguale all' altra somma *FHC*, *HCB*; ma la prima somma è eguale a due retti; dunque a due retti sarà parimente eguale la seconda somma; or in tal caso abbiamo dimostrato che le rette *AB*, *MF* sono parallele: sicchè saranno ancora parallele due rette *AB*, *MF*, se segate da una terza *KE* sullo stesso piano formano l'angolo *KHF*=*HCB*: ma l' angolo *KHF* è eguale al suo verticale *MHC* (20); dunque siccome la condizione de' due angoli *KHF*, *HCB* eguali rendono le due rette *AB*, *MF* parallele, così essendo l' angolo *KHF* eguale ad *MHC*, le due rette saranno ancora parallele, se sono eguali i due angoli *MHC*, *HCB*.

I due angoli *KHF*, *HCB*, chiamansi *corrispondenti*, ed i due altri *MHC*, *HCB* si appellano *angoli alterni*.

Dunque saranno ancora paralelle due rette segate da una terza su di uno stesso piano, quando sono eguali frà di loro gli angoli corrispondenti, o pure gli alterni.

30. Quindi se da un punto *H* vi vuol menare una parallela ad una retta *AB*; menate da questo punto una qualunque retta *HC* su di *AB*, basterà fare al punto *H* dalla retta *CH* un angolo *MHC*=*HCB* (11) ò pure, prolungando la *CH* verso *K*, basterà fare al punto *H* della retta *KH* un angolo *KHF*=*HCB*; egli è chiaro che nell' uno, o nell' altro modo ne risulterà la *MF* paralella ad *AB* (29).

31. Supponiamo ora, che le rette *AB*, *CD* siano parallele; segate da una terza *MO*, dovrà essere la somma degli angoli interni dalla stessa parte *BNO*, *NOD* eguali a due retti; giacchè altrimenti le due rette *AB*, *CD* non saranno più parallele, cosa che distrugge la supposizione.

Or anche la somma degli angoli BNM, BNO pareggia due angoli retti (19); dunque sarà $BNO + NOD = BNO + BNM$; toltone BNO di comune, rimarrà $BMM = NOD$; ma $BNM = ANO$; dunque nella stessa ipotesi delle due rette parallele, sarà ancora $ANO = NOD$. E perciò *se due rette sono parallele, gli angoli interni posti dalla stessa parte saranno eguali a due retti, e saranno eguali tra di loro tanto gli angoli corrispondenti, quanto gli angoli alterni.*

32. Da ciò ne tiriamo alcune conseguenze interessanti, e sulle prime, meniamo una retta HP diversa da HM parallela a PB; egli è chiaro, che prendendo nella HP un punto qualunque i diverso da H; poicchè è CQ maggiore di Ci, la retta HP non passerà per due punti equidistanti da AB, e quindi non avrà la condizione per essergli parallela (25); or poichè i due angoli MHC, HCP sono eguali a due retti, essendo MHC maggiore di PHC, sarà la somma degli angoli PHC, HCP minore di due retti (31), e perciò *due rette, che, segate da un' altra formano con questa gli angoli interni della stessa parte minori di due retti, non sono parallele.*

Lo stesso, dimostrerà, quando la somma degli angoli interni della stessa parte è maggiore di due retti.

33. Dippiù se due angoli BAG, CEF abbiano i lati BA, AG rispettivamente paralleli ai lati CG, EF, e rivolti dalla stessa parte, poicchè prolungata CE in D è l' angolo CDG eguale all' angolo in A suo corrispondente, e similmente l' angolo CEF eguale al suo corrispondente CDG, sarà ancora l'angolo $CEF = BAG$; e perciò *se due angoli hanno i lati*

Fig 8

paralleli rispettivamente, e diretti per lo stesso verso, saranno eguali.

Fig. 7 34. Finalmente supponiamo le due rette AB, EF ambedue parallele a CD; facendole segare da un' altra retta MP, che sia con esse nello stesso piano, per il parallelismo delle rette AB, CD, sarà l'angolo $MNB = NOD$; e per il parallelismo delle altre due rette CD, EF, sarà l'angolo $NOD = OPF$ (31); quindi sarà ancora l'angolo $MNB = OPF$, e perciò le due rette AB, EF saranno ancora paralelle (29). Sicchè *se due rette sono parallele ad una terza, sono anche parallele fra di loro.*

CAPO III.

Dell' incontro scambievole di tre rette, ossia de' triangoli rettilinei.

35. L'ANALISI della posizione rispettiva di due rette non ci offre altro a considerare; passiamo perciò ad occuparci all' incontro di tre rette.

Fig. 9. Siano AB, BC, AC tre rette, che s' incontrano a vicenda, ne sorgerà una figura ABC la quale ha tre *lati* AB, AC, BC, tre angoli in A, in B, in C, e racchiuderà una superficie $ABOC$: questa figura chiamasi *triangolo*, se si vuol considerare rispetto agli angoli, o pure *trilatera*, se si riguarda per rapporto a' lati. Noi principiaremo ad occuparci dell' analisi de' lati. e degli angoli di quessa figura, ed in appresso ne consideraremo ancora l' aja.

Ora possono i lati AB, AC, BC essere tutti tre eguali, due solamente eguali, o tutti tre diseguali. Nel primo caso il triangolo diccsi

equilatero, nel secondo *isoscele*, e nel terzo *scaleno*.

Uno de' lati AC considerato come quello su cui poggia il triangolo ABC, dicesi base del triangolo ABC.

Cominciamo dall' analizare i lati, e gli angoli de' triangoli isolatamente considerati.

36. E sulle prime prolunghiamo un lato AC del triangolo ABC verso H, e dal punto C meniamo una retta CG parallela ad AB (30); allora si avrà l' angolo ABC eguale al suo alterno BCG, e dippiù l' angolo GCH eguale al suo corrispondente BAC (29): or i due angoli BCG, GCH formano l' intiero angolo BCH; dunque l' angolo BCH sarà eguale a' due angoli del triangolo in A, ed in B; aggiuntovi di comune l' angolo BCA; ne risulterà la somma de' due angoli conseguenti BCH, BCA eguali a tutti e tre gli angoli in A, in B, in C del triangolo ABC; e quindi, siccome quella pareggia due retti, così tutti e tre gli angoli del triangolo ABC saranno eguali anche a due retti. La stessa dimostrazione ha luogo per qualunque altro triangolo.

L' angolo BCH si chiama esterno, e gli altri in A, ed in B si dicono interni opposti. Dunque, *se in un triangolo si prolunga un lato, l' angolo esterno è eguale ad ambidue gl' interni, ed opposti, e tutti e tre gli angoli di esso sono eguali a due retti.*

1.° Quindi l' angolo esterno di un triangolo è maggiore di uno de' suoi interni, ed opposti.

2.° Un triangolo non può avere più di un angolo retto; allora gli altri due angoli acuti eguaglieranno un retto.

3.° Essendo l' angolo ottuso maggiore del

retto, a più forte ragione un triangolo non potrà avere più di un angolo ottuso: allora gli altri due angoli acuti saranno tanto minori del retto, per quanto questo manca dall' ottuso. Egli è chiaro da ciò, che un triangolo potrà avere tutti e tre gli angoli acuti solamente.

4.° Se sono dati due angoli di un triangolo o la loro somma solamente, si conoscerà il terzo togliendo questa somma da due retti.

5.° Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli rispettivamente; dovrà ancora essere il rimanente angolo del primo eguale al rimanente angolo del secondo, poicchè ciascheduno degli angoli rimanenti è supplemento a due angoli uguali.

Il triangolo, che ha un angolo retto, chiamasi triangolo *rettangolo*; dicesi *ottusangolo* quello, che ha un angolo ottuso, ed *acutangolo* quello, che ha tutti e tre gli angoli acuti.

Nel triangolo rettangolo il lato opposto all' angolo retto chiamasi *ipotenusa*, e *catetti* i due rimanenti lati, che, incontrandosi, formano l' angolo retto.

Passiamo ora ad esaminare qual corrispondenza vi è tra' lati, e gli angoli di un triangolo.

Fig 10 37. Sia dato primieramente un triangolo ABC; isoscele, in cui i due lati eguali siano AB, BC. Si divida l' angolo ABC per metà con una retta BD (12); è chiaro (13), che anche AC resterà divisa per metà nel punto D, ove viene segata dalla BD: allora passando la BD pe' punti B, e D rispettivamente equidistanti da' punti A, e C, sarà essa perpendicolare ad AC (14); e quindi sarà l' angolo $BDA = BDC$; ma è ancora per costruzione l' angolo $ABD = CBD$; dunque sa-

ranno ancora eguali i rimanenti angoli BAD, BCD de' due triangoli BAD, BCD rispettivamente; ma questi angoli sono opposti a' lati eguali BC, BA. Sicchè *nel triangolo isoscele a' lati eguali si oppongono angoli eguali.*

Dunque ogni triangolo equilatero è anche equiangolo; e poicchè tutti gli angoli di un triangolo sono eguali a due retti (36), ne segue che ogni angolo del triangolo equilatero sarà un terzo di due retti.

Dunque un triangolo equilatero non potrà esser rettangolo, e moltomeno ottusangolo.

38. Se l'angolo ABC sia retto, gli altri due BAC, BCA saranno eguali ad un retto (36); ma essi sono eguali; dunque ciascheduno sarà la metà di un retto. Sicchè *ciascheduno de' due angoli acuti di un triangolo isoscele rettangolo, in cui l'angolo retto è contenuto da' due lati eguali, pareggia la metà di un angolo retto.*

39. Prolunghiamo i lati BA, BC verso E, ed F rispettivamente; sarà l' angolo CAE supplemento dell' angolo CAB (19), e l' angolo ACF supplemento dell' angolo ACB; ma sono eguali i due angoli CAB, ACB; dunque anche eguali saranno i due angoli CAE, ACF. E perciò *se i lati eguali di un triangolo isoscele si prolunghino, gli angoli, che ne sorgeranno al di sotto della base saranno parimente eguali.*

40. Si supponga ora nel triangolo BAC l'angolo $BAC = BCA$; allora se potessero essere diseguali i due lati BA, BC opposti a questi angoli, si tagli dal maggiore, e sia BA, una parte $BG = BC$, e si congiunga CG. Ciò posto poicchè nel triangolo CAG il lato AG si è prolungato verso B, sarà l' angolo esterno BGC

maggiore del suo interno opposto BAC, e quindi maggiore ancora dell' angolo BCA, che per ipotesi è eguale a BAC: or l' angolo BGC dovrebbe esser eguale a BCG, come opposti a' lati BC, BG, che si suppongono eguali (37); dunque ne verrebbe in conseguenza l' angolo BCG maggiore dell' angolo BCA, ossia la parte maggiore del tutto, il che essendo un assurdo; sarà un assurdo ancora, che essendo i due angoli BAC, BCA eguali, sia il lato BA maggiore di BC: in simil modo potrà dimossrarsi, che non può esser minore; dunque dovrà essergli eguale; e perciò *: in ogni triangolo ad angoli eguali si oppongono lati eguali.*

Quindi il triangolo equiangolo sarà anche equilatero.

41. Sia ora un triangolo qualunque, in cui il lato BC sia maggiore del lato BA: si tagli $BD=BA$ e si congiunga AD; sarà l'angolo $BAD=BDA$ per essere essi opposti a'lati eguali BD, BA(36); ma poicchè nel triangolo CDA il lato CD si è prolungato verso B, l' angolo esterno BDA sarà maggiore del suo interno ed opposto BCA(36); dunque parimente l' angolo BAD sarà maggiore dell' angolo in C; ma BAC è maggiore di BAD; sicchè a più forte ragione sarà BAC maggiore di BCA, e perciò *in qualunque triangolo al lato maggiore si oppone l' angolo maggiore.*

Fig. 11

42. Inversamente supponiamo BAC maggiore dell' angolo BCA; egli è chiaro che BC non potrà essere nè eguale, nè minore di AB, giacchè nel primo caso sarebbe l' angolo BAC eguale all'angolo BCA(40); e nel secondo sarebbe BAC minore di BCA(41), conseguenze, che distruggono l' ipotesi. Dunque *in ogni triangolo all' angolo maggiore si oppone il lato maggiore.*

43. Quindi se un lato BO del triangolo BOC si prolunghi, e sul prolungamento preso $OD = OC$, si congiunga DC; essendo l'angolo BCD maggiore dell'angolo OCD, o del suo eguale ODC (37), sarà ancora BD maggiore di BC (42); ma è BD eguale a $BO+OC$; sicchè sarà $BO+OC$ maggiore di BC; e perciò *in ogni triangolo due lati sono maggiori del terzo*. Fig. 11

44. Veniamo ora alla soluzione del seguente problema. *Date tre rette* P, Q, R *tali, che due di esse siano maggiori della rimanente, si vuole con esse costruire un triangolo.* Fig. 13

Supponiamo sciolto il problema, e che ABC sia il triangolo richiesto, i cui lati BC, BA, AC, siano rispettivamente eguali a P, Q, R: allora poicchè BC, e BA debbono essere rispettivamente P, e Q, egli è chiaro che tutto si riduce a trovare un punto B, che nel tempo stesso disti da C per quanto è P, e da A per quanto è Q. Quindi il punto B dovendo esser distante da C per quanto è P, egli dovrà trovarsi nella circonferenza di quel cerchio, che ha il punto C per centro, e la retta P per raggio: similmente poicchè B dee distare da A per quanto è Q, egli dovrà ancora trovarsi sulla circonferenza di quel cerchio che ha per centro A, e Q per raggio. Fa d'uopo dunque ch'esso si ritrovi nell'intersezione di queste due circonferenze. Quindi se co' centri A, e C descriviamo due archi co' rispettivi raggi P, e Q, e dal punto B, ove questi si segano meniamo due rette a' punti A e C, il problema resterà sciolto, ed il triangolo ABC sarà il triangolo richiesto.

Se le tre rette P, Q, R fossero state eguali, il triangolo ABC sarebbe riuscito equilatero.

Quindi per costruire su di una retta un tri-

angolo equilatero, non si dee, che descrivere due circonferenze di cerchio, prendendo per centri di esse gli estremi della retta data, e per raggio la stessa retta, e di poi unire il punto, ove si segano le due circonferenze, coll' estremità della retta data.

45. Passiamo ora ad occuparci dall'analisi de' triangoli non più isolatamente; ma paragonati tra loro.

E sulle prime noi diremo *eguali* due triangoli, quando hanno eguali rispettivamente i tre lati, i tre angoli, e quindi l' aja; cioè quando combaciano, e ciò per distinguerli da' triangoli *equivalenti*, cioè eguali solo nell' aja.

Ciò posto dalla soluzione del problema precedente ne segue, che dat' i lati di un triangolo, è dato anche il triangolo. Infatti supponiamo che ci siano not' i lati del triangolo DEF, i quali siano P, Q, R; paragoniamo questo triangolo al triangolo noto ABC, che supponiamo avere i medesimi lati; e vediamo, s' è possibile, che possa essergli differente. A tal effetto si ponga il triangolo DEF sul triangolo ABC, in modo che DF combaci con AC, cui dalla supposizione è eguale; e poicchè è ancora $DE=AB$, il punto E dovrà trovarsi sulla circonferenza del cerchio *so* descritto col centro A, e col raggio DE: similmente essendo $EF=BC$, il punto E dovrà ancora trovarsi sulla circonferenza del cerchio *mn* descritto col centro C, e col raggio EF: or dovendosi il punto E trovare insieme sulle due circonferenze *so*, *mn*, uopo è ch' ei cada sul punto B comune ad ambidue; allora i lati DE, EF combacceranno ancora rispettivamente co' lati AB, BC. e tutto il triangolo DEF col triangolo ABC; dunque gli sarà eguale; dal che

Fig. 13

ne dedurremo che *se due triangoli hanno i lati rispettivamente fra di loro eguali, saranno eguali.*

46. Si supponga ora, che due triangoli ABC, DEF abbiano due lati AB, BC rispettivamente eguali a due lati DE, EF; e l' angolo in B compreso da' primi eguale a quello in E compreso dagli altri; indi imaginiamo il triangolo DEF soprapposto all' altro ABC, in modo che DE vada a combaciare con AB, cui è eguale: in virtù dell' eguaglianza degli angoli in B, ed in E, non che de' lati BC, EF; dovrà ancora BC combaciare con EF, e cadendo i punti A e C su' punti D, ed F, la AC combacerà ancora con DF (3), gli angoli in A, ed in C combaceranno cogli angoli in D ed in F, e tutto il triangolo DEF combacerà con tutto il triangolo ABC e perciò gli sarà eguale; da ciò ne conchiuderemo, che *sono ancora eguali due triangoli, che hanno un angolo eguale compreso tra due lati eguali ciascuno a ciascuno.* Fig 11

Quindi un triangolo sarà dato, allorche ne sono dati due de' suoi lati, e l' angolo compreso.

Se si voglia dunque costruire un triangolo di cui se ne conoscono due lati P, Q, ed un angolo compreso m; fatto all' estremo E della retta DE eguale a Q un angolo $DER=m$, si tagli $EF=P$, e si congiunga DF: allora il triangolo DEF avendo due lati DE, EF rispettivamente eguali a Q, e P, e l' angolo DEF compreso eguale all' angolo m dato, sarà il triangolo richiesto.

47. Sia ora ne' due triangoli ABC, DEF l' angolo in A eguale all' angolo in D, l' angolo in C eguale a quello in F, e 'l lato AC adjacente agli angoli in A ed in C eguale al lato DF ad- Fig 13

iacente agli altri due angoli. In tal ipotesi, se imaginiamo il triangolo ABC posto sul triangolo DEF, in modocchè AC si faccia combaciare con DF, cui si è supposto eguale, facendo cadere il punto A sul punto D, e 'l punto C sull' altro F: allora, per eguaglianza degli angoli A, in C, in D, in F rispettivamente, dovrà cadere il lato AB sul lato DE, e'l lato BC sul lato EF(7) e propriamente il punto B, ove AB incontra BC sul punto E, ove DE incontra EF, giacchè altrimenti cadendo il punto B sopra o sotto al pun- E, non si troveranno più eguali gli angoli in A, in C; in D, in F rispettivamente (7), il che è contro l' ipotesi. Dunque *due triangoli sono ancora eguali, allorchè hanno un lato eguale tra due angoli eguali adiacenti.*

48. Quindi se due triangoli ABC, DEF avessero due angoli in A, ed in C eguali rispettivamente a due angoli in D ed in F, ed eguali ancora i due lati AB, DE opposti agli angoli eguali in C, ed in F; poicchè l' eguaglianza degl' angoli in A, in C; in D, in F rispettivamente porta all' uguaglianza degli altri due angoli in B, ed in E (36, 5.°), si troverebbero i due triangoli ABC, DEF avere tra gli angoli eguali in A, in B; in D, in E, rispettivamente i lati adiacenti AB, DE eguali, e questa ipotesi rientrarebbe in quella del teorema precedente, dal che ne conchiuderemo, *che sono anche eguali due triangoli, i quali hanno due angoli rispettivamente eguali a due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi in un triangolo eguale al lato corrispondente nell' altro.*

Quindi dati due angoli m, n, la cui somma sia minore di due retti, ed una retta AB, sarà dato quel triangolo, che ha un lato AB ad-

Fig. 14

iacente a due angoli rispettivamente eguali ad m, ed n, o che avendo due angoli m, ed n, ha un lato AB opposto ad uno di essi angoli. Se un tal triangolo si voglia costruire; supponendolo già fatto, e sia ACB, nel primo caso gli angoli in A, e B dovranno essere rispettivamente eguali agli angoli m, ed n, e nel secondo l'angolo in A, o in B eguale ad uno di essi, e l'angolo in E all'altro: quindi la prima costruzione si riduce a formare agli estremi A, e B della retta data AB due angoli rispettivamente eguali gli angoli m, ed n; e la seconda, fatto l'angolo in A eguale ad uno degli angoli dati, si riduce a condurre da B una retta BE tale che BEA risulti eguale all'altro angolo. Per far ciò all' estremo A della AB si faccia l'angolo EAB eguale ad uno degli angoli dato m; indi al punto A della AE si formi l'angolo EAC eguale all' altro angolo n; si prolunghi AB verso F, e dal punto B si meni BE parallela ad AC; sarà il triangolo BAE il triangolo richiesto. Infatti sulle prime è chiaro che la BE dee incontrare la AC (32); poichè essendo l'angolo in B eguale al suo corrispondente CAF, aggiunto al primo l'angolo EAB, ed al secondo l'angolo CAB maggiore di EAB, sarà la somma degli angoli EAB, EBA minore della somma degli angoli CAB, CAF, e quindi minore di due retti (19): allora poichè l'angolo CAE è eguale al suo alterno AEB, il triangolo AEB avrà due angoli in A, ed in E eguali rispettivamente agli angoli in m ed in n, e'l lato AB dato opposto ad uno degli angoli dati in E eguale ad n: esso sarà dunque il triangolo cercato.

49. Seguitiamo ad occuparci delle condizioni necessarie, affinchè due triangoli siano eguali, e

Fig. 13 supponiamo, che i due triangoli ABC, DEF abbiano i lati AB, BC; DE, EF rispettivamente eguali, ed eguali ancora non più gli angoli compresi in B, ed in E, ma due angoli qualunque in A, ed in D opposti a' lati eguali BC, EF: allora se questi triangoli fossero eguali, dovrebbe essere ancora l'angolo $BCA=EFD$, e per conseguenza ambidue dovrebbero essere della stessa specie: osserviamo dunque, se nell'ipotesi presente è necessaria ancora la condizione de' due angoli in C, ed in F della medesima specie per conchiudere l'eguaglianza de' due triangoli ABC, DEF. E sulle prime, se i detti triangoli non fossero eguali, gli angoli in B ed in E compresi da' lati rispettivamente eguali AB, BC; DE, EF dovrebbero ancora esser diseguali (47): sia in tale ipotesi l'angolo in E il maggiore, ed al punto E della retta DE si faccia l' angolo $DEO=ABC$; allora saranno eguali i due triangoli ABC, DEO, che hanno tra due angoli eguali rispettivamente in A, in B; in D, in E i lati adiacenti AB, DE eguali, e sarà perciò $EO=BC=EF$; e quindi l'angolo $EOF=EFO$ (37); dunque EO non potrà essere perpendicolare sopra DF, altrimenti nel triangolo EOF vi sarebbero due angoli retti EOF, EFO(36,2.°); dunque l'angolo EOD non potrà essere della stessa specie dell' angolo EOF, o del suo eguale EFO; ma è l'angolo $EOD=BCA$; dunque nell'ipotesi che gli angoli ABC, DEF sono diseguali, i due angoli in C, ed in F non potranno essere della stessa specie: se dunque gli angoli in C, ed in F si suppongano della stessa specie, gli angoli in B, ed in E non potranno più esser diseguali, giacchè altrimenti restarebbe distrutta l' ipotesi degli angoli in C, ed in F del-

la stessa specie: allora i due triangoli ABC, DEF avranno tra lati eguali rispettivamente AB, BC; DE, EF gli angoli compresi ABC, DEF eguali, e saranno perciò eguali (46). Quindi *sono eguali due triangoli, i quali hanno due lati eguali a due lati rispettivamente, e degli angoli non compresi due eguali, e due della medesima specie.*

50. Le verità, che abbiamo analizzate ci mostrano Fig. 15 una certa dipendenza scambievole, ch'esiste tra'lati, e gli angoli di due triangoli: generalizziamo vieppiù le ipotesi, e sulle prime supponiamo sulla stessa base AD del triangolo ABD, e con lati differenti formati i triangoli AOD, ACD, AGD, AHD ec., si avrà $AB+BC$ maggiore di AC (45); aggiuntovi di comune CD, sarà $AB+BD$ maggiore di $AC+CD$: similmente è $DC+CO$ maggiore di DO; aggiuntovi AO di comune sarà $AC+CD$ maggiore di $AO+OD$: nello stesso modo si vedrà, ch' essendo $DH+HG$ maggiore di DG; $DG+GC$ maggiore di CD; aggiunti a'primi AG di comune, ed AC a' secondi, sarà ancora $AH+HD$ maggiore di $AG+GD$; ed $AG+GD$ maggiore di $AC+CD$. Or è l'angolo AOD, com'esterno del triangolo DCO, maggiore del suo interno opposto DCO (36); e per la stessa ragione l'angolo DCA è maggiore dell' angolo in B, e dell'angolo in G; questo è maggiore dell' angolo in H ec.; dunque ne conchiuderemo che *se su di una stessa base si formi una serie di triangoli con differenti lati; gli angoli serberanno un cammino opposto a quello de' lati, da quali sono compresi, cioè minori lati comprenderanno un angolo maggiore.*

Quindi *se da un punto* O *del triangolo* ABD *si tirino le rette* AO, OD *agli estremi* A, *e* D

del lato AD, *i lati* AO, OD *saranno minori de lati* AB, BD; *ma vi comprenderanno un angolo maggiore*.

51. Generalizziamo ancora ne'due triangoli *ABC*, *DEF* forniti de' lati eguali *AB*, *BC*; *DE*, *EF* rispettivamente, l'ipotesi degli angoli compresi in *B*, ed in *E*, supponendoli qualunque; essi allora potranno essere diseguali; supponiamo che lo siano, e che *DEF* sia il maggiore; vediamo com'è la base *DF* rispetto ad *AC*. A tal effetto bisogna ridurre i lati *DF*, *AC* a far parte di uno stesso triangolo, per conoscere quelli dagli angoli di questo. Quindi al punto *E* della retta *ED* si faccia l'angolo *DEG* eguale all'angolo *ABC*, e si tagli *EG*=*EF*, e perciò eguale a *BC*; si congiunga *GF*, e *GD*; questa sarà eguale ad *AC*(46), e formerà colla retta *DF* parte di uno stesso triangolo *DFG*. Allora, essendo l'angolo *DGF* maggiore di *EGF*, sarà anche maggiore dell'angolo *EFG*, cui è eguale *EGF*; ma è l'angolo *EFG* maggiore ancora dell'angolo *DFG*; dunque a più forte ragione sarà *DGF* maggiore di *DFG*; e quindi *DF* opposto al primo angolo sarà maggiore di *DG* opposto al secondo; ma è *DG*=*AC*; dunque sarà *DF* maggiore di *AC*. E perciò *se due triangoli hanno tra due lati rispettivamente eguali gli angoli compresi diseguali, il lato opposto in uno di essi all'angolo maggiore sarà maggiore del lato opposto all'angolo minore nell'altro*.

52. Segue da ciò, che se all'opposto due triangoli *ABC*, *DEF* hanno due lati *AB*, *BC*, *DE* *EF* rispettivamente eguali, e la base del secondo *DF* sia maggiore di *AC* base dell'altro, dovrà essere ancora l'angolo *DEF* maggiore dell'angolo *ABC*, giacchè se gli fosse eguale, sarebbe ancora

$AC = DF$ (46), e se gli fosse minore, sarebbe DF minore di AC perciocchè abbiamo dimostrato nel teorema precedente, il che non potendo essere per l'ipotesi di DF maggiore di AC, ne viene che *se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali, e la base in uno di essi sia maggiore della base dell' altro, l' angolo opposto in uno alla base maggiore sarà maggiore dell' angolo opposto nell' altro alla base minore.*

CAPO IV.

Dell' incontro scambievole di più di tre rette. Figure quadrilatere, e loro proprietà. Paragone delle superficie parallelogramme, e racchiuse da più di due rette comunque, che si fa discendere dall' analisi delle figure quadrilatere. Trasformazione di una superficie in un' altra, e quadratura di esse.

53. L' ANALISI delle nostre idee ci porta ora naturalmente ad osservare le proprietà delle figure che nascono dall' incontro scambievole di più di tre rette sopra di un piano. Queste figure chiamansi quadrilatere, pentagoni, esagoni ec., se le rette, le quali, incontrandosi, vanno a formarle, sono quattro, cinque, sei, ec.

Cominciamo da ciocchè vi ha di più semplice, considerando quattro rette comunque AB, BC; CD, DA, che s'incontrano a vicenda; ne sorgerà una figura quadrilatera $ABCD$, la quale vien conosciuta da' geometri sotto il nome di *trapezio*. Assoggettiamo ora a qualche condizione le rette che s' incontrano per formare una figura quadrilatera, e supponiamo che due rette

Fig 16

Fig. 3. AD, BC eguali, e parallele siano congiunte dalla stessa parte da due altre rette AB, DC; allora, condotta BD, poichè l'angolo CBD è eguale al suo alterno BDA, saranno perfettamente eguali i due triangoli CBD, BDA, che tra lati rispettivamente eguali CB, BD; AD, DB comprendono gli angoli eguali CBD, BDA, e sarà quindi $AB=CD$; e l'angolo $ABD=BDC$; ma questi due angoli sono alterni fatti dalle due rette AB, CD, e dalla segante BD; dunque le due rette AB, DC dimostrate eguali sono anche parallele (29); dal che ne segue che *se due rette sono eguali, e parallele, le congiungenti dalla stessa parte son o anche eguali, e parallele*.

La figura $ABCD$, che ha i lati opposti eguali, e paralleli, chiamasi da' geometri *parallelogrammo*, e la retta BD, che congiunge due angoli opposti di essa, dicesi *diagonale*.

Dunque in ogni parallelogrammo gli angoli adjacenti in A, ed in D; in D, ed in C ec. sono eguali a due retti (31), cosicchè, dato un angolo A sarà anche noto l'angolo D uno adjacente, come supplemento a due retti.

54. Inoltre essendo gli angoli CBD, ABD eguali a' loro rispettivi alterni BDA, BDC, sarà tutto l'angolo ABC somma de' primi eguale all'angolo ADC somma de' secondi: in simil modo può dimostrarsi l'angolo in A eguale all'angolo in C: Sono dippiù eguali i due triangoli CBD, BDA, che tra lati rispettivamente eguali CB, BD, AD, DB comprendono gli angoli eguali CBD, BDA. Dunque *in ogni parallelogrammo gli angoli opposti sono eguali, e la diagonale lo divide in due triangoli perfettamente eguali.*

35. Da ciò ne tiriamo una conseguenza interessante; cioè si menino da un punto O qualunque preso nella diagonale BD le rette FG, IH rispettivamente parallele a' lati BC, BA del parallelogrammo AC, ne sorgeranno quattro parallelogrammi FI, HG, AO, OC: e sarà il triangolo BAD eguale al triangolo BCD, il triangolo BFO eguale al triangolo BIO, e'l triangolo OHD eguale all' altro OGD (54), allora se dal triangolo BAD ne togliamo i triangoli BFO, OHD, e dal triangolo BCD ne togliamo gli altri BIO, OGD, resterà il parallelogrammo AO eguale all' altro OC. Fig. 17

I parallelogrammi FI, HG si chiamano parallelogrammi intorno la diagonale, e gli altri AO, OC supplementi de' parallelogrammi intorno la diagonale. Dunque *i supplementi de' parallelogrammi intorno la diagonale sono eguali.*

56. Dall'essere in un parallelogrammo eguale sì i lati opposti, che gli angoli opposti, ne viene che un parallelogrammo sarà dato, dati due lati, e l' angolo da questi compreso (53) poicchè allora saranno noti gli altri due lati; ed essendo anche noto il supplemento dell' angolo dato, si avranno ancora gli altri due angoli eguali rispettivamente all' angolo dato, ed al suo supplemento.

57. Dunque dati due lati AB, AD, e l'angolo in A compreso da essi, resterà costruito con essi il parallelogrammo $ABCD$, menando da' punti B, e D due rette rispettivamente parallele ad AD, AB; infatti, congiunta BD, poicchè la somma degli angoli CBD, BDC è minore di due retti, le due rette BC, DC dovranno incontrarsi in un punto C (52): dippiù i due triangoli CBD, BDA che hanno adjacenti allo stesso lato BD i

golo $ACG=AGC$; ma è anche l' angolo $BOC=AGC$, come corrispondente (31); dunque sarà l'angolo $BCO=BOC$, e quindi $BC=BO$, sicchè il parallelogrammo BD sarà ancora equilatero (57), e perciò sarà un quadrato. Similmente si dimostrerà esser un quadrato il parallelogrammo HF; dunque i parallelogrammi intorno la diagonale di un quadrato sono anche *quadrati*.

Quindi poicchè AE riunisce in se i quattro parallelogrammi BD, HF, AO, OE; ed i due primi sono i quadrati rispettivi di CD, DE parti di CE, gli altri AO, OE come rettangoli eguali (35), e formati da CD, e DE pareggiano il rettangolo di CD *in* DE due volte preso; ne segue, che *il quadrato di una retta divisa comunque è eguale a' quadrati di ciascheduna parte, insieme con doppio rettangolo contenuto da esse parti* (a).

Essendo l' angolo $ACG=AGC$; ma $ACG=CGF$; dunque sarà $AGC=CGF$ *in un quadrato la diagonale divide gli angoli opposti per metà.*

59. Si faccia sopra di AB il quadrato AN; essendo $AB=HO=OF=DE$, sarà AN quadrato di DE, e quindi eguale ad HF; aggiungnendo al primo AO, ed al secondo OE, sarà $DG=OK$, ed ambidue saranno eguali al doppio rettangolo di CE in ED. Dippiù l' intera figura $CEGKN$ è eguale a CE^2+DE^2; or poicchè è BD eguale all' intiera figura $CEGKN$ meno i due rettangoli DG, OK, sarà $CD^2=CE^2+DE^2-2CE\times ED$. *Cioè il quadrato fatto sulla differenza di due*

(a) Questa è la 4. del 2. degli elementi di Euclide.

rette pareggia i quadrati di esse rette, meno il doppio rettangolo fatte dalle stesse rette.

Fig. 17 60. Poicchè il parallelogrammo $ABCD$ viene diviso dalla diagonale BD in due triangoli eguali ABD, BDC; sarà il parallelogrammo doppio di uno di essi. Dunque se *un parallelogrammo, ed un triangolo poggiano sulla stessa base, e quindi su basi eguali, e sono racchiusi fra le stesse parallele l'aja del parallelogrammo sarà doppia di quella del triangolo.*

Essendo la perpendicolare quella, che misura la distanza fra le due rette parallele, o di un punto da una retta, come si è osservato al di sopra (8, 25), le figure racchiuse fra le medesime parallele avranno la medesima altezza, cioè la perpendicolare menata fra le parallele; cosicchè l'altezza di un triangolo sarà la perpendicolare abbassata dal vertice di uno de' suoi angoli sopra un lato considerato come base: e quindi potremo dire, che *l'aja di un parallelogrammo è doppia di quella di un triangolo, che ha con esso la stessa base, ed altezza.*

61. Meniamo dal punto D una retta qualunque DP che resti terminata dalla BP, e colle rette AD, DP si campia il parallelogrammo AP; allora per essere alla stessa AD eguale tanto BC, che QP, sarà ancora $BC=QP$, e quindi toltone BP di comune, sarà $BQ=PC$; ma è ancora $AB=DC$ ed $AQ=DP$; dunque il triangolo ABQ sarà equilatero, e quindi eguale al triangolo DPC; aggiunto or all' uno, or all' altro il trapezio $ABPD$, ne risulterà il parallelogrammo $AQPD$ eguale all' altro $ABCD$.

Dunque *i parallelogrammi, che poggiano sulla stessa base, e quindi su basi eguali, ed*

hanno la medesima altezza, sono eguali in aja. Or condotta la diagonale QD, poichè il triangolo AQD è metà del parallelogrammo $AQPD$, essendo questo eguale ad $ABCD$, di cui n' è anche metà ABD; saranno eguali i due triangoli ABD, AQD; dunque *sono eguali in aja due triangoli, che poggiano sulla stessa base, o basi eguali, ed hanno la stess' altezza.*

62. Quindi se sulla stessa base AD, (lo stesso dicasi per le basi eguali) si costruiscano dalla stessa parte due triangoli ABD, AED equivalenti, è chiaro, che la congiungente de' vertici B, ed E sarà parallela ad AD; imperciocchè, se potesse esserci nell' ipotesi presente una parallela BH diversa da BE, congiunta HD, saranno eguali i due triangoli ABD, AHD, che poggiano sulla stessa base, ed hanno la stessa pretesa altezza; (prop. prec.) ma è ABD eguale per ipotesi ad AED; dunque sarà anche il triangolo AHD eguale al triangolo AED, di cui n' è parte, il che non può essere. Sicchè *se sulla stessa base, o su basi eguali e dalla stessa parte si costruiscano due triangoli equivalenti, la retta, che unirà i vertici di essi sarà parallela alla base.* Fig. 19

64. Segue da ciò, che dato un triangolo ABD, se si voglia costruire un triangolo, che gli sia equivalente, basterà prolungare BE indefinitamente, e menare da' punti A, e D ad un punto qualunque E della BE le due rette AE, DE; il triangolo AED sarà il triangolo richiesto.

65. Si divida AD per metà in O, e dal punto O si meni OG parallela ad AB; saranno eguali i due parallelogrammi AG, OC, che poggiano su basi eguali AO, OD, ed hanno la stessa altezza (61); e quindi l' intero parallelogrammo AC

sarà doppio di uno di essi; ma AC è doppio parimente del triangolo ABD, o del triangolo EAD, (60,61); sicchè saranno eguali il parallelogrammo AG, e'l triangolo ABD, o AED; e perciò *saranno eguali un triangolo ed un parallelogrammo, allorchè, avendo la medesima altezza, il primo ha una base doppia del secondo.*

66. Si conduca la diagonale BO; sarà il parallelogrammo AG doppio del triangolo ABO; ma il parallelogrammo AG è eguale al triangolo ABD (65); dunque sarà parimente il triangolo ABD doppio del triangolo ABO. E perciò *un triangolo è doppio di un altro, che ha la metà della sua base, e la stess' altezza.*

Da questi principj noi andiamo a tirarne la soluzione de' varj problemi interessanti che riguardano la trasformazione de' triangoli in parallelogrammi, e viceversa.

67. E sulle prime *dato un triangolo vogliamo trasformarlo in un parallelogrammo equivalente.*

Sia ADC il triangolo dato; egli è chiaro Fig. 19 da ciocchè abbiamo dimostrato, che il parallelogrammo richiesto dovrà esser quello, che ha per base la metà di AC, e la stess' altezza del triangolo dato ADC (65); quindi, divisa AC per metà in B, si meni dal punto D una retta indefinita DL parallela ad AC, sarà DL il luogo degl'infiniti punti F, G, i quali, congiunti co' punti B, o C, determinano due lati FB BC; o FC,CB; o GB,BC; o GC,CB del parallelogrammo richiesto, cosicchè compito con due di questi lati un parallelogrammo (57), sarà questo eguale al triangolo ADC: infatti ciascheduno di questi parallelogrammi ha per base BC metà

di AC base del triangolo, ed è racchiuso con questo fra le medesime parallele (59).

Se il parallelogrammo richiesto si assoggetti alla condizione di avere un angolo eguale ad un angolo dato O, allora, fatto al punto B, o C della retta BC metà di AC un angolo FBC eguale all'angolo dato O, e prolungata BF fino all'incontro di DC parallela ad AC, i due lati FB, BC saranno i lati del parallelogrammo, che si domanda. Infatti compito con essi il parallelogrammo $BFGC$ (57), questo è eguale in aja al triangolo dato ADC, che poggia sul doppio della sua base (65) ed ha la stessa altezza: ha dippiù per costruzione un angolo FBC eguale all'angolo dato O: questo dunque sarà il parallelogrammo richiesto.

68. Si assoggetti di vantaggio il parallelogrammo alla condizione di avere un lato dato OH: allora supponendo che OG sia il parallelogrammo eguale al triangolo dato nella retta data OH con un angolo H eguale all'angolo dato O, distendendo GF, ed HO, se dal punto F tra l'angolo EFO, o dal punto O tra l'angolo DOF menata una retta EO si prolunghino insieme EO, e GH, finchè s'incontrano in un punto A, ed indi co' lati AG, GE si compia il parallelogrammo CG, prolungata FO, dovrà risultarne OC eguale ad OG, e quindi eguale al dato triangolo, e l'angolo in B sarà eguale all'angolo dato O (33). Dunque se all'opposto sotto un angolo CBO eguale all'angolo in O si faccia un parallelogrammo BD eguale al triangolo dato, ed indi, prolungata DO verso H, si tagli sul prolungamento una retta OH eguale alla retta data, compiendo co' lati OB, OH il parallelogrammo BH, e congiungendo AO, la quale, per esser la somma degli angoli DCA,

Fig. 21

OAC minori di due retti, prolungata dovrà incontrarsi colla CD in un punto E, se co'lati AC, CE, compito il parallelogrammo CG, si prolunghi BO in F; ne sorgerà il parallelogrammo OG, che sarà quello, che sodisfa alle condizioni del problema. Infatti il parallelogrammo OG è eguale ad OC, e quindi eguale al triangolo dato, cui OC è eguale per costruzione; è dippiù l' angolo in H eguale all' angolo in B, perchè fatti da lati OH, HC; CB, CO rispettivamente paralleli (33) e quindi eguale all' angolo dato O, cui l' angolo in in B è per costruzione eguale; ed ha ancora per lato la retta data OH; dunque esso soddisfa alle condizioni del problema.

69. L' analisi delle cose precedenti ci porta alla soluzione del seguente generalismo problema ,, *dato un rettilineo qualunque* ABCD *trasformarlo in un parallelogrammo equivalente sotto un dato angolo.* Fig. 11

Egli è chiaro, che se il dato rettilineo si sciolga in triangoli CDA, CAB, resterà sciolto il problema, costruendo sotto un angolo E eguale all'angolo dato un parallelogrammo EM eguale al triangolo CDA; ed indi sulla retta OM, (pro.prec.) e sotto un angolo O eguale allo stesso angolo dato un altro parallelogrammo OP eguale al triangolo CAB. Allora il parallelogrammo EP riunendo i due parallelogrammi EM, OP equivalerà al rettilineo dato $ABCD$. Intanto conviene dimostrare, che dietro l' indicata costruzione i due parallelogrammi EM, OP ne formano un solo EP. Infatti, se si riflette, che i due angoli in E, ed MOK, perchè eguali per costruzione all' angolo dato, sono eguali fra loro, aggiunto lor di comune l'angolo MOE, saranno i due angoli MOE, OEH eguali a'due angoli MOE, MOK; e quindi, sic-

come i primi sono eguali a due retti (31), a due retti parimente saranno eguali i secondi, dal che ne conchiuderemo che le due rette *EO*, *OK* formeranno una retta continuata (23), e che perciò sarà tutta *EK* parallela ad *HM*, e l'angolo *KOM* eguale al suo alterno *OMH*, (31) cosicchè aggiunto lor di comune l'angolo *OMP*, sarà la somma degli angoli *KOM*, *OMP* eguale all'altra somma *OMH*, *OMP*; ma la prima somma è eguale a due retti (31); sicchè a due retti sarà parimente eguale la somma degli angoli *OMH*, sarà *OMP*, dal che ne viene che anche *MH* giace per dritto ad *MP* (23); ed i due parallelogrammi *EM*, *NP* ne formeranno un solo *EP*.

70. Veniamo ora alla soluzione del problema inverso a quello, che abbiamo sciolto ne' paragrafi precedenti con diverse condizioni; cioè *trasformare un parallelogrammo in un triangolo equivalente*. Sia *AC* il parallelogrammo dato; egli è chiaro che prolungata *BC* indefinitamente verso *M*, ed *L*, se vi fosse un triangolo *AGF* equivalente al parallelogrammo *AC*, in modo che il vertice di esso poggiasse in un punto della retta *LM*, dovrebbe essere *AF* base del triangolo doppia di *AD* base del parallelogrammo (65); dunque presa sul prolungamento di *AD* una retta *DF* eguale ad *AD*, e prolungata *CB* indefinitamente verso *L*, ed *M*; l'indefinita *LM* sarà il luogo di tutt'i punti *B*, *G*.., i quali, congiunti co' punti *A*, ed *F*, faranno risultare i triangoli *ABF*, *AGF*... tutti equivalenti al parallelogrammo *AC*. Fig. 23

71. Il problema precedente considerato sotto un aspetto di generalità ci fa concepire l'idea di un problema generalissimo, cioè *di trasformare un*

rettilineo qualunque in un altro equivalente, e che abbia un lato di meno.

Fig. 14 Sia infatti un quadrilineo $ABCD$; supponiamolo trasformato nel triangolo equivalente AEB: allora per essere ADB comune tanto al triangolo AEB, quanto al quadrilineo dato; essendosi questi supposti equivalenti, dovrà essere il triangolo DEB equivalente all'altro DCB; dunque all'opposto, se congiunt'i lati DC, CB, che formano un angolo C, facciamo su di DB, e nel prolungameto di AD o di AB un triangolo $DEB=DCB$ (64), il quadrilineo $ABCD$ si trasformerà nel triangolo equivalente AEB. Similmente sia $AFBCD$ una figura di cinque lati, e supponiamola trasformata nel quadrilineo $AFBE$, allora essendo $AFBD$ comune ad entrambi, dovrà essere il triangolo EDB eguale all' altro CDB; e quindi egualmente che quì sopra, rifletteremo, che se congiunt'i due lati CD, CB che formano un angolo in C, su di DB, e nel prolungamento di AD, o di BF si formi il triangolo EDB equivalente all' altro DCB, ne risulterà il quadrilineo $AEBF$ eguale alla figura di cinque lati $AFBCD$. E potendosi lo stesso osservare su di altre figure, ne conchiuderemo generalmente, che un rettilineo qualunque si trasformerà in un altro equivalente e con un lato di meno, congiungendo due lati DC, CB, che fanno angolo; indi prolungando un lato AD adjacente ad uno de' lati DC, CB: allora condotta dal punto C una retta CE parallela a DB, e congiunta EB, poicchè ne risulta il triangolo EDB eguale all' altro CDB, aggiunto lor di comune il rettilineo restante, ch' è sotto DB, si avrà la trasformazione richiesta.

72. Si faccia su di FC catetto del triangolo rettan-Fig. 15 golo FCD un quadrato FH: allora essendo la som-

ma degli angoli FCH, FCD eguale a due retti, le due rette HC, CD saranno per diritto (23), cosicchè, congiunta KD, il quadrato HF sarà doppio del triangolo KDF, col quale poggia sulla stessa base KF, ed è racchiuso fra le medesime parallele KF, HD (60): or del medesimo triangolo n' è anche doppio il rettangolo di FD in KI, per aver amendue la stessa base FD, e la medesima altezza KI; dunque sarà il quadrato $KFCH$ equivalente al rettangolo di FD KI.

73. Da ciò ne tiriamo la soluzione del seguente problema. *Dato un quadrato* FH *vogliamo trasformarlo in uno rettangolo equivalente, che abbia per base una retta* L. Questo problema non si riduce, che a trovar l'altezza del rettangolo che si chiede; quindi col centro F, e col raggio L si descriva un arco, che taglia HC prolungata in D; si unisca FD, e si prolunghi verso I; indi dal punto K si abbassi KI perpendicolare su di FD; questa sarà l'altezza del rettangolo richiesto: infatti dietro questa costruzione, congiunta KD, il rettangolo di FD in KI, ossia di L in KI, e'l quadrato FH sono insieme doppj del triangolo FKD (60), e quindi eguali tra di loro.

74. Poicchè gli angoli CFI, CFE sono eguali a due retti, come angoli conseguenti; toltone l'angolo CFK, che, come angolo del quadrato, è eguale ad un retto, rimarrà l'angolo KFI complemento dell' altro CFE: ma, abbassata dal vertice C del triangolo rettangolo in C la perpendicolare CE su di FD, anche l'angolo ECF è complemento dell' angolo EFC; dunque sarà $KFI=ECF$; è dippiù l'angolo in I eguale all'angolo CEF, poicchè retti, e'l lato $KF=FC$ come

fatto su di un lato FD *di un triangolo* FCD *è eguale a' quadrati fatti da' rimanenti lati* FC, CD, *l' angolo contenuto da questi sarà retto.*

76. Essendosi dimostrato che il quadrato di DF è eguale a' due rettangoli di DF in FE, e di FD in DE, e potendosi lo stesso dimostrare, dividendo FD in quante parti si vuole, ne viene, che *se una retta sia comunque divisa, il quadrato fatto su di essa sarà eguale alla somma di rettangoli fatti dall' intiera retta, e da ciascuna delle sue parti* (a).

Dippiù avendo dimostrato, che è $FG^2=DF.FE$, e $GD^2=FD.DE$; ma FE, ED sono segmenti dell'ipotenusa intercetti rispettivamente tra gli estremi F, e D de' cateti CF, CD, e la perpendicolare CE abbassata sull'ipotenusa; dunque potremo conchiuderne, che *in ogni triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è eguale al rettangolo dell' intiera ipotenusa nel segmento adjacente, che taglia la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto.*

Poicch' è $FD^2=FG^2+GD^2$, sarà $FC^2=FD^2-CD^2$, e $CD^2=FD^2-FC^2$. *Dunque i lati di un triangolo rettangolo hanno tal nesso tra di loro, che conosciuti due, si conosce anche il terzo.*

77. Quindi se si vuol ritrovare un quadrato, che sia eguale alla differenza di due quadrati diseguali, i cui lati siano AB, CD, non si dee, che costruire un triangolo rettangolo, in cui l'ipotenusa sia AB, e CD un cateto; sarà l' altro cateto il lato del quadrato richiesto. A tal effet-

Fig. 16

(a) Questa è la 2. del 2. degli elementi di Euclide.

to col centro A, e col raggio AB si descriva un arco BF, e tagliata $AD=CD$, dal punto D si elevi la perpendicolare DE, e dal punto E, ove questa incontra l' arco si meni al punto A la retta EA; sarà DE il lato del quadrato richiesto. Infatti è $ED^2=AE^2-AD^2=AB^2-CD^2$.

78. Nello stesso modo possiamo, dati più quadrati, costruirne uno eguale alla somma di essi. Siano A, B, C i lati di quadrati; egli è chiaro che si troverà il lato del quadrato eguale a' tre quadrati dati, costruendo due triangoli rettangoli, il primo che abbia per catetti due di questi lati, A, B; e 'l secondo l' ipotenusa del primo triangolo, e l' altro lato C; l' ipotenusa di questo secondo triangolo rettangolo sarà il lato del quadrato in quistione. A tal effetto, fatto un angolo MAL retto, si tagliano su' lati dell' angolo $AG=A$, ed $AI=B$, e si congiunga GI; di poi tagliata $AN=GI$, ed $AH=C$, si congiunga HN; sarà HN il lato del quadrato richiesto. Infatti è $HN^2=AN^2+AH^2=GI^2+AH^2=AG^2+AI^2+AH^2=A^2+B^2+C^2$. Con un metodo del tutto simile potremo proseguire a trovare un quadrato eguale ad un numero qualunque di altri quadrati.

Fig. 27

Fig. 25

79. Poicchè si è dimostrato il rettangolo FB eguale al quadrato FH, noi possiamo da questi principj tirarne la soluzione del seguente utilissimo problema „ *trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente.*

Si abbia infatti il rettangolo AE e si supponga sciolto il problema, in modo, che FH sia il quadrato richiesto: in tal caso FC lato di un tal quadrato dovrebbe esser catetto di quel triangolo rettangolo, che ha FA per ipotenusa; quin-

di prolungata FE, e presa $FD=FA$, tutto si riduce a determinare nel prolungamento di BE un punto G tale, che congiungendo GF, GD l'angolo FGD sia retto. A tal effetto riflettiamo, che allorchè l'angolo DCF è retto, gli altri due angoli CDF, CFE insieme presi gli saranno eguali, cosicchè facendo un angolo $OCD=CDF$, dovrà essere il rimanente $OCF=OFC$; allora i triangoli DOC, COF saranno isosceli, e le tre rette CO, OF, OD saranno eguali. Dunque all'opposto, se, divisa FD per metà in O, descriviamo col centro O, e col raggio OD un arco che taglia la BC in C, sarà questo quel punto da cui condotte agli estremi F, e D della retta FD le rette CF, CD, ci darà l'angolo DCF retto, e CF lato del quadrato in quistione.

Potendo trasformare qualunque rettilineo in un parallelogrammo equivalente sotto un dato angolo, se lo trasformeremo sotto un angolo retto, il rettilineo si cambierà in rettangolo; or possiamo trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente; dunque ogni rettilineo potrà esser trasformato in un quadrato equivalente. Quest' operazione si dice *quadrare* un rettilineo.

80. Veniamo ora ad osservare, dietro la proprietà del triangolo rettangolo riguardo a' quadrati fatti su' suoi lati, come sono in un triangolo qualunque i quadrati de' lati opposti ad un angolo acuto o pure ottuso riguardo a' quadrati de' lati che lo comprendono. Sia sulle primo in un triangolo ABC l'angolo in C acuto; meniamo la perpendicolare BD: questa o cadrà tra i lati, o al di fuori. Nel primo caso, essendo $AD=AC-CD$; sarà (59) $AD^2=AC^2+CD^2-2ACD$; e quindi aggiungendo d'ambe le parti BD^2, si avrà $AD^2+BD^2=AC^2+CD^2+DB^2-2ACD$; ma è AD^2+

Fig 23.

$DB^2=AB^2$, e $CD^2+DB^2=BC^2$ (74); dunque sostituendo si avrà $AB^2=AC^2+BC^2-2ACD$. Similmente nel caso che la perpendicolare cade fuori de' lati, essendo $DA=DC-CA$, sarà $AD^2=CD^2+AC^2-2ACD$; ed aggiugnendo d' ambe le parti BD^2, si avrà $AD^2+BD^2=CD^2+AC^2+BD^2-2ACD$; ma è $AD^2+BD^2=BA^2$, e $CD^2+BD^2=BC^2$; dunque sostituendo si avrà infine $BA^2=AC^2+BC^2-2ACD$. Dal che ne conchiuderemo, che *in qualunque triangolo* ABC *il quadrato fatto sopra di* AB *lato opposto all' angolo acuto in* C *è eguale a due quadrati di* AC, *e di* CB, *che comprendono quest' angolo, toltone però il doppio rettangolo fatto da* AC *lato adjacente all'angolo in* C *e da* CD *intercetta tra il punto* C, *e la perpendicolare, che si abbassa dal vertice dell' angolo* B *sullo stesso lato* AC: e perciò il *quadrato fatto sul lato opposto all' angolo acuto è minore di quadrati fatti su' rimanenti lati.*

81. Supponiamo reciprocamente che nel triangolo ABC il quadrato di AB sia minore de' due quadrati fatti su di AC, CB; allora elevata da C una perpendicolare CE sopra AC, tagliata $CE=CB$, e congiunta AE, sarà il quadrato di AB anche minore de' quadrati fatti su di AC, CE; ma per essere l' angolo ACE retto è il quadrato di AE eguale a' due quadrati di AC, CE; (74) dunque sarà AB^2 minore di AE^2, e quindi AB minore di AE; in tal ipotesi, poicchè i due triangoli ECA, ACB hanno due lati EC, CA; BC, CA rispettivamente eguali, e la base del primo AE è maggiore di AB base del secondo, sarà l'angolo ACE maggiore dell'angolo ACB (52); ma ACE è retto per costruzione; dunque sarà ACB acuto, e perciò l' inversa della proposizione precedente è anche vera, cioè *se il quadrato fat-*

to su di un lato AB *di un triangolo* ABC *è minore de' quadrati fatti su' rimanenti lati, l' angolo compreso da questi sarà acuto.*

82. Sia ora nel triangolo ABD l' angolo ABD Fig. 29 ottuso: abbassata dal punto D una perpendicolare DC sopra AB prolungato, questa dovrà cadere fuori de' lati del triangolo; altrimente se cadesse tra lati, come in F, nel triangolo DFB, vi sarebbe un angolo retto DFB, ed un angolo ottuso DBF, il che è un assurdo(36): allora si ha $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2ABC$(58); aggiuntovi d'ambe le parti CD^2 si avrà $AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2ABC$; ma è $AC^2 + CD^2 = AD^2$, e $BC^2 + CD^2 = BD^2$; dunque sostituendo sarà $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2ABC$; dal che ne conchiudiamo, che *in un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso è eguale a' quadrati, che comprendono un tal angolo più il doppio rettangolo fatto da un lato adjacente all' angolo ottuso nella porzione, che allo stesso lato aggiugne la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo opposto ad esso.*

Quindi il quadrato fatto sul lato opposto all' angolo ottuso è maggiore de' quadrati fatti su i lati, che lo comprendono.

83. Se reciprocamente si suppone che in un triangolo ABD il quadrato di un lato AD è maggiore della somma de' quadrati de' rimanenti lati AB, BD; allora, elevata dal punto B una perpendicolare BE, tagliata $BE = BD$, e congiunta AE, sarà ancora AD^2 maggiore di $AB^2 + BE^2$, e quindi maggiore di AE^2(74), dal che ne viene che sarà AD maggiore di AE: in tal ipotesi avendo i due triangoli ABD, ABE due lati AB, BD, AB, BE rispettivamente eguali, ed essendo la base AD del primo maggiore di AE base del se-

condo, sarà l' angolo ABD maggiore dell' angolo ABE (52); ma ABE è retto; dunque l' angolo ABD sarà ottuso. E perciò l' inversa dalla proposizione precedente è anche vera: cioè *se il quadrato fatto su di un lato* AD *di un triangolo* ABD *è maggiore de' quadrati fatti su rimanenti lati, l' angolo compreso da questi sarà ottuso* (a).

Fig. 30 81. Sia ABC un triangolo qualunque, in cui AC si consideri come base; si divida questa per metà nel punto E, e abbassata da B la perpendicolare BD, si unisca BE; il triangolo ACB resterà diviso in due altri triangoli ABE, BEC: nel primo, poicchè l' angolo BDE è retto, sarà l' angolo BED acuto; e quindi si avrà $AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AED$; (80) nel secondo, poicchè l' angolo BEC è maggiore del suo interno opposto BDC, sarà esso ottuso, e e si avrà $BC^2 = EB^2 + EC^2 + 2AED$ (82), ove riflettendo che $AE =$

(a) Noi possiamo servirci delle verità dimostrare per ritrovare l' altezza di un triangolo di cui se ne conoscono i lati. Infatti o la perpendicolare cade al dentro, o al di fuori: nel primo caso essendo $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC . CD$, sarà aggiungendo a queste quantità uguali $2AC . CD$ e togliendovi AB^2, $2AC . CD = AC^2 + BC^2 - AB^2$, e dividendo per $2AC$, si avrà $CD = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC}$; allora poichè è $BD^2 = BC^2 - CD^2$, sarà $BD^2 = BC^2 - \left[\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC}\right]^2$ quantità espressa co' soli dati del triangolo. Fig. 28

Similmente riflettendo per l' altro caso, che è $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2CA . AD$, si avrà $AD = \frac{BC^2 - (AB^2 + AC^2)}{2AC}$; e quindi

$$BD^2 = AB^2 - \left[\frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2AC}\right]^2$$

EC, si avrà $AB^2+BC^2=2BE^2+2AE^2$; dal che ne conchiudiamo, che *se in un triangolo qualunque* ABC, *divisa la base* AC *per metà in* E, *dal vertice* B *al punto* E *si meni una retta* BE, *il doppio della somma de' quadrati di* BE, *e di* AE *sarà eguale alla somma de' quadrati degli altri due lati*.

85. Meniamo nel parallelogrammo $ABCD$ una Fig. 31 diagonale AC, e divisi i lati AD, BC per metà, in F, e G, si unisca FG; saranno perfettamente eguali i due triangoli AOF, GOC, nei quali si osservano gli angoli AOF, OAF, OFA rispettivamente eguali agli angoli GOC, OCG, OGC, ed un lato $AF=GC$, quindi sarà $AO=OC$, ed $FO=OG$; dunque la diagonale AC, e la retta FG, che unisce i punti medj de' lati opposti AD, BC si bisegano a vicenda. Similmente condotta l'altra diagonale BD, e menata per i punti medj H, ed I degli altri due lati AB, DC la retta HI, si dimostrerà, che si bisegano a vicenda le rette FG, DB; HI, AC; HI, DB; ma il punto ove si bisegano le due AC, FG è O; dunque il punto O sarà ancora quello, ove si bisegano tutte; dal che ne conchiuderemo, che *in ogni parallelogrammo le diagonali, e le rette, che uniscono i punti di mezzo de' lati opposti si bisegano vicendevolmente nello stesso punto*.

86. Quindi, menando per O una retta qualunque MN, la quale si prolunghi, finchè incontra i lati opposti; poichè sono eguali i due triangoli AMO, CON, i quali sono equiangoli, ed hanno un lato $AO=OC$, sarà ancora $MO=ON$, dal che ne dedurremo generalmente, *che ogni retta condotta pe'l punto* O, *e prolungata fino*

all' incontro de' lati opposti , resta in questo stesso punto bisegata.

87. Quindi nel triangolo BAD poichè dal vertice A si è condotta sulla metà della base BD una retta AO, si avrà $BA^2 + AD^2 = 2AO^2 + 2OB^2$ (84), ed essendo per la stessa ragione $CB^2 + CD^2 = 2OB^2 + 2OC^2 = 2OB^2 + 2AO^2$, sarà $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AO^2 + 4BO^2$, ma è $4AO^2$ il quadrato di $2AO$, ossia di AC ed è $4BO^2$ il quadrato di $2BO$, ossia di BD, dunque si avrà $AB^2 + BC^2 + CA^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$; cioè *in ogni parallelogrammo la somma de' quadrati de' lati è eguale alla somma de' quadrati delle due diagonali.*

Fig. 32 88. Passiamo ora a sciogliere un quadrato, o un rettangolo in altri quadrati, o rettangoli equivalenti. E sulle prime, se con una retta AH divisa comunque ne' punti E, ed F, e con un altra retta L indivisa se ne formi il rettangolo AG, condotte da' punti E, ed F le perpendicolari EC, FD, il rettangolo AG si troverà diviso ne' rettangoli AC, ED, FG; ma AC è il rettangolo di AE in AB, ossia di AE in L, ED è il rettangolo di EF in EC, ossia di EF in L, ed FG è il rettangolo di FH in L; dunque sarà il rettangolo di AH in L eguale alla somma de' rettangoli fatti da AE, EF, FH parti di AH, e da L. Cioè *il rettangolo contenuto da una retta indivisa, e da un' altra divisa in parti è eguale alla somma de' rettangoli contenuti dall' indivisa, e da ciascuna parte della divisa.*

Se L è eguale ad una parte HF della retta AH, allora il rettangolo di AH in L si cambierà nel rettangolo di AH in HF, e gli altri

rettangoli di AE in L, di EF in L, e di FH in L si cambieranno rispettivamente ne' rettangoli di AE in HF di EF in HF, e di HF in HF, ossia HF^2; e quindi si avrà in tal ipotesi il rettangolo di AH in HF eguale al quadrato di HF insieme co' rettangoli fatti dalle altre parti AE, EF, e da HF. Cioè *il rettangolo fatto da una retta divisa comunque, e da una sua parte è eguale al quadrato di questa parte insieme co' rettangoli fatti da questa stessa, e dalle altre parti* (a).

89. Quindi poichè si ha $CE^2 = CD^2 + DE^2 + 2CDE$; aggiuntovi di comune DE^2, sarà ancora $CE^2 + DE^2 = CD^2 + 2DE^2 + 2CDE$; ma per essere il rettangolo $CED = DE^2 + CDE$, è ancora $2CED = 2DE^2 + 2CDE$; sicchè sostituendo sarà $CE^2 + DE^2 = CD^2 + 2CED$, da cui ne conchiudiamo, che *se una retta è divisa in un punto, la somma de' quadrati fatti uno sull' intiera retta, e l' altro su una delle sue parti è eguale al doppio del rettangolo fatto dall' intiera retta, e dalla stessa parte, insieme col quadrato dell' altra parte* (b). Fig. 18

90. Dunque se una retta AB sia comunque divisa in un punto C, e per diritto le si agginga $BD = BC$, poichè si ha $AD^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC$ (58); ma abbiamo dimostrato $AB^2 + BC^2 = 2AB.BC + AC^2$ (89); dunque sostituendo sarà $AD^2 = 4AB.BC + AC^2$. Cioè *se una retta* AB *sia divisa comunque in un punto* C, *il quadrato fatto su di* AD *somma delle rette* AB, BC *sarà* Fig. 11

(a) Questa è la 3. del 2 degli elementi di Euclide.
(b) Questa è la 7. del 2. degli elementi di Euclide.

eguale al quadruplo rettangolo fatto da esse rette AB, BC *insieme col quadrato della parte rimanente* AC (a).

91. Dunque, essendo $DB^2+BC^2=2DB.BC+CD^2$ (89) sarà $2DB^2+2BC^2=4DB.BC+2CD^2$, ma tagliata $BA=BC$, è ancora $4DB.BC+DC^2=AD^2$ come abbiamo dimostrato (90); sicchè, sostituendo, sarà $2DB^2+2BC^2=AD^2+CD^2$; dal che ne conchiudiamo, che *se una retta* AC *si seghi per metà nel punto* B, *e per diritto le si aggiunga una retta qualunque* CD, *il quadrato fatto sull'intiera* AD *somma della retta data, e dell'aggiunta insieme col quadrato fatto sulla retta aggiunta* CD, *sarà doppio del quadrato fatto sulla metà della retta data* AC, *e dell'altro formato su* BD *somma della metà della retta data, e dell'aggiunta* (b).

Fig. 34

Fig. 35

92. Similmente se una retta AB si seghi per metà in D, e disegualmente in C; poichè si ha $BD^2+DC^2=2BD.DC+BC^2$, (89) sarà $2BD^2+2DC^2=4BD.DC+2BC^2$, ma per essere $AC=BD+DC$, è $AC^2=4BD.DC+BC^2$; (90) dunque sarà $2BD^2+2DC^2=AC^2+BC^2$; cioè *se una retta* AB *si divida per metà in* D, *e disegualmente in un punto* C *la somma de' quadrati delle parti diseguali* AC, CB *sarà doppia di quella de' quadrati fatti uno sulla metà* DB *della retta data, e l'altro sulla retta* DC *tra' punti delle divisioni* (c).

93. Sia ancora una retta AB divisa per metà in D, e disegualmente in C: allora, se colle rette AC,

---

(a) Questa è la 8. del 2. degli elementi di Euclide.
(b) Questa è la 10. del 2. degli elementi di Euclide.
(c) Questa è la 9. del 2. degli elementi di Euclide.

CB si formi un rettangolo, si avrà $AC.CB=AD.CB+DC.CB$ (88); e quindi aggiuntavi di comune il quadrato di CD, sarà $AC.CB+CD^2=AD.CB+DC.CB+CD^2$; ma per essere $AD=DB$, è ancora $AD.CB=DB.CB$, ed è dippiù $DB.CD=CD^2+DC.\times.CD$ (88); dunque sostituendo $CB^2+DC.CB$ ad $AD.CD$, si avrà $AC.CB+DC^2=CB^2+2DC.CB+CD^2=DB^2$ (58): dal che ne segue, che *se una retta è divisa per metà in un punto, e disegualmente in un altro, sarà il quadrato della metà di essa eguale al rettangolo fatto dalle parti diseguali insieme col quadrato della retta situata tra' punti delle divisioni* (a).

94. Dunque essendo $AC.CB+DC^2=BD^2$ (93), sarà $AC.CB=BD^2-DC^2$, ma è $AC=AD+DC=$ alla somma $BD+DC$; ed è $CB=BD-DC$: dunque sarà $(BD+CD)(BD-CD)=BD^2-CD^2$; cioè *il rettangolo fatto dalla somma e dalla differenza di due rette diseguali è eguale alla differenza de' quadrati fatti sulle medesime rette.*

95. Quindi se una retta AC si divida per metà in B, e per diritto le si aggiunga una qualunque retta CD; poicchè è $BD+BC=AD$, e $BD-BC=CD$; siccome si ha $(BD+BC)(BD-BC)=BD^2-BC^2$ (94), sarà ancora $AD.CD=BD^2-BC^2$ e quindi $AD.CD+BC^2=BD^2$, dal che ne conchiuderemo, che *se una retta* AC *sia divisa per metà nel punto* B, *e per diritto le si aggiunga un' altra* CD *sarà il quadrato di* BD, *somma della metà della retta data, e dell' aggiunta eguale al rettangolo fatto da tutta* AD, *e dalla parte aggiunta* CD *insieme* Fig. 34.

(a) Questa è la 5. del 2. degli elementi di Euclide.

col quadrato della retta, ch' è tra' punti delle divisioni (a).

96. Supponiamo ora, che sia anche L divisa in Fig. 31 parti; allora sarà il rettangolo di AE in L eguale alla somma de' rettangoli di AE in ciascheduna parte di L (88), e per la stessa ragione i rettangoli di EF in L, e di FH in L saranno eguali rispettivamente a' rettangoli di EF e di FH in ciascuna parte L, ma sono i rettangoli fatti da AE, EF, FH, e da L eguali al rettangolo di AG in L (88); dunque *sarà in tale ipotesi il rettangolo di* AH *in* L *eguale a tanti rettangoli, quanto è il numero delle parti di* AH *moltiplicato per quello delle parti di* L.

97. Se tanto AH, quanto L vi dividano in parti eguali, per esempio, in metri, per rapportarli ad una unità di misura lineare costante; allora que' rettangoli parziali, in cui si scioglie il rettaneolo di AH in L, diverranno metri quadrati; dal che ne conchiuderemo, che *l' aja di un rettangolo è l' insieme di tanti metri quadrati, quanto è il prodotto del numero de' metri lineari, ne' quali si sono divisi i suoi lati.*

Or noi abbiamo dimostrato, che l' aja di un parallelogrammo qualunque è equivalente a quella di un rettangolo, che ha con esso la stessa base, ed altezza (61); dunque si avrà in metri quadrati l' aja di un parallelogrammo $ACIH$ di cui sono noti i lati, ritrovando la sua altezza CE per mezzo de' lati AC, AH, CH, come si è fatto vedere al di sopra (not. 86), e prendendo tanti metri quadrati, quanto è il prodotto del numero de' me-

(a) Questa è la 6. del 2. degli elementi di Euclide.

tri lineari, che sono in *AH* per quelli, che sono in *CE*.

97. Poicchè un triangolo è metà di un parallelogrammo, che ha con esso la stessa base, ed altezza, sarà l' aja di un triangolo eguale a tanti metri quadrati, quanto è la metà del prodotto dei metri lineari, che sono nella sua base pe'l numero di quelli, ne' quali si divide l' altezza.

Potendo trasformare ogni rettilineo in un parallelogrammo o triangolo equivalente, (69, 70) potremo anche conoscere l' aja di un rettilineo qualunque, calcolando quella del parallelogrammo equivalente, o calcolando l'aja de' triangoli, ne' quali esso si è sciolto.

Sia per esempio un trapezio *ABCD* a basi parallele *AD*, *BC*; si tiri la diagonale *BD*; ne sorgeranno due triangoli *ABD*, *BDC*, i quali perchè situati tra le medesime parallele avranno la medesima altezza, cioè la perpendicolare *BE* condotta tra queste due parallele (25, 26). Or poicchè l' aja del triangolo *ABD* è eguale a tanti metri quadrati, quanto è la metà del prodotto di quelli che sono in *AD* pe'l numero di quelli, che sono in *BE*; ed essendo similmente l'aja del triangolo *BDC* eguale a tanti metri quadrati quanto è la metà del prodotto di metri lineari, che sono in *BC* pe'l numero di quelli, che sono in *BE*, sarà la somma di questi eguale all' aja intiera del trapezio *ABCD*. E perciò *l' aja di un trapezio a basi parallele è eguale a tanti metri quadrati, quanto è il numero de' metri lineari, che contiene la sua altezza moltiplicati per quelli, che sono nella semisomma delle sue basi parallele.* Fig. 36

98. Siccome non è possibile, che i lati di un rettangolo possono essere sempre divisi perfetta-

mente in metri lineari; perciò, quando questo non possa accadere, fatta la divisione in metri, decimetri, centimetri ec. bisogna osservare a quali parti siamo costretti di arrestarci, e supponendo, per esempio di non potersi oltrepassare i millimetri, si dividano i lati del rettangolo in millimetri, e si moltiplichi il numero de' millimetri che comprende la base e pe 'l numero di quelli, che sono nell' altezza; giacchè si avranno allora tanti millimetri quadrati, quanto è il prodotto del numero de' millimetri lineari, che sono nella base per quelli, che sono nell' altezza. Fatto ciò i millimetri quadrati si ridurranno in centimetri, o decimetri, e metri quadrati, riflettendo, che per avere un centimetro quadrato si richiedono 100 millimetri quadrati, per fare un decimetro quadrato ci vogliono 10000 millimetri quadrati, e che infine 1000000 di millimetri quadrati formano un metro quadrato. Supponiamo per esempio, che si abbia da calcolare l' aja di un rettangolo contenuto da' lati *AF*, *AN*. Si divida il primo lato ne' metri lineari *AB*, *BC*..., di cui è capace; indi si ritrovino nella rimanente parte *CF* quanti decimetri vi sono, e supponendo, che ne siano otto contenuti in *CD*, si ritrovino nella rimanente parte *DF* tutt' i centimetri, ch' ella contiene; e supponendo che *DE* ne contensa sette, si ritrovinò finalmente nella parte rimanente *EF* quel numero di millimetri, che vi entrano, e supponiamo, ch' essa contenga otto millimetri. In tal modo il lato *AF* conterrà due metri lineari otto decimetri, sette centimetri, ed otto millimetri; e poicchè ogni metro lineare è l' unione di 1000 millimetri, ogni decimetro è l' insieme di 100 millimetri, ed ogni centimetro è l' unione di 10 millimetri, il lato *AF* conterrà 2878

Fig. 37

millimetri lineari. Lo stesso si faccia sull' altro lato *AN*, e supponiamo di averlo diviso in un metro, 9 decimetri, e 6 millimetri, che in tutto forma 1906 millimetri. Si moltiplichino ora i millimetri lineari, che sono in *AF* per quelli, che sono in *AN*, cioè 2878 millimetri lineari per 1906, e si avrà, ciò facendo, l' aja del rettangolo cercato in 5485468 millimetri quadrati, che fanno 5 metri 48 decimetri 54 centimetri, e 68 millimetri quadrati.

Quindi dietro tali cose, la superficie di uno parallelogrammo sarà eguale a tanti metri, decimetri, centimetri ec. quadrati quanto è il prodotto del numero de' metri, decimetri ec. lineari che si contengono nella sua base, ed altezza, e la metà di un tal prodotto ci darà la superficie di un triangolo (a).

99. Supponiamo ora, che su di un piano s'incontrino comunque a vicenda un numero qualunque di rette *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*; egli è chiaro, che se dal vertice *E* di uno degli angoli del poligono *ABCDEF* si menino a' vertici degli angoli opposti le rette *EB*, *EC*, il poligono *ABCDE* resterà diviso in tanti triangoli *AEB*, Fig. 38

(a) Nel valutare la superficie di un parallelogrammo ci siamo serviti dell' espressione, che la sua superficie è composta di tanti metri, decimetri, centimetri ec. quadrati, quanto è il prodotto del numero de' metri, decimetri lineari, che si contengono nella sua base, ed altezza. Introducendo la parola *numero* abbiamo evitata la frase comune, cioè che per avere la superficie di un parallelogrammo fa d' uopo moltiplicare la sua base per l' altezza. La voce moltiplicazione, che vale prendere un certo numero di volte non è relativa, che a' soli numeri, cosicchè moltiplicando una linea, o una superficie non si ha, che un' altra linea, o superficie moltiplice della prima rispettivamente; ma quando si moltiplica il numero di alcune parti di più linee, le linee allora non vengono riguardate, che come grandezze discrete, cioè come aggregati di più unità lineari.

BEC CED quanti lati esso ha meno due: or gli angoli del poligono *ABCDE* riuniscono tutti gli angoli de' triangoli *AEB*, *BEC*, CED, e sono gli angoli di un triangolo eguali a due retti (36); *dunque gli angoli di un poligono sono eguali a tante volte due retti, quanti lati esso ha meno due* (a).

Ne segue da ciò, che se si prolunghino i lati di un qualsivoglia poligono (b) *ABCDE* in *a*, *b c*, *d*, *e*; poicchè ciascun angolo esterno *BAa*, *CBb* fa col suo rispettivo conseguente interno *EAB*, *ABC* due retti, la somma degli angoli interni, ed esterni eguaglierà tante volte due retti, quanto è il numero de' lati *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* del poligono; ma abbiamo dimostrato gli angoli interni eguali a tante volte due retti, quanto è il numero de' lati meno due; sicchè la somma degli angoli esterni sarà eguale a due volte due retti ossia a quattro retti.

E perciò *se si prolunghino i lati di un poligono qualunque, la somma degli angli esterni eguaglierà sempre quattro retti*, (c).

100. Se i lati *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* di un poligono *ABCDE* sono tutti eguali, ed eguali sono ancora gli angoli ch' essi comprendono; il

Fig. 38

(a) Quindi se n disegna il numero de' lati di un poligono, π due angoli retti, ed S la somma degli angoli interni del poligono, sarà sempre $S = (n-2)\pi$

(b) Qui si suppone, che il poligono non abbia verun angolo rientrante, come *BOC*.

(c) Essendo $= (n-2)\pi$ la somma di tutti gli angoli di un poligono di un numero n di lati, poicchè in un poligono regolare tutti gli angoli sono uguali, un angolo solo sarà la parte nesima di $(n-2)\pi$, cioè sarà $\frac{(n-2)\pi}{n}$; e quindi sarà sempre minore di due retti.

poligono dicesi *regolare*. Dunque il triangolo equilatero e 'l quadrato sono figure regolari.

101. Sia $ABDEFG$ un poligono qualunque regolare: si dividano due angoli BAG, AGF per metà: allora, prolungata FG in K, perchè la somma degli angoli OGF, OGK è uguale a due retti, essendo OGK maggiore di OGA, sarà la somma degli angoli OGA, OGF minore di due retti, ossia, per essere $OGF=OAG$ come metà di angoli eguali, sarà $OGA+OAG$, minore di due retti; e quindi le rette AO, GO, che bisegano gli angoli eguali BAG, AGF, dovranno convenire in un punto O (32): da questo punto si menino a' vertici de' rimanenti angoli del poligono le rette OB, OD, OE, OF. Ora sono eguali i due triangoli AGO, FGO, che hanno $AG=GF$, GO di comune, e l'angolo compreso da' primi lati $AGO=OGF$ compreso dagli altri, dunque sarà $OA=OF$, e l'angolo $OAG=OFG$; ma è l'angolo $BAG=GFE$; dunque siccome l'angolo OAG è per costruzione metà dell'angolo BAG, così sarà parimente l'angolo GFO metà dell'angolo GFE: Continuando in simil modo il raziocinio potremo similmente dimostrare, che le rette OE, OD, OB sono eguali fra loro, ed alle altre OA, OG, OF, e che gli angoli FED, EDB, DBA sono parimente divisi per metà da queste rette.

Il punto O, che serba dà vertici degli angoli di un poligono regolare egual distanza dicesi *centro* del poligono, ed è chiaro da ciocchè abbiamo detto, ch' esso è nell' intersezione di due rette, che bisegano due de' suoi angoli.

Dunque tutte le rette, che dal centro di

un poligono regolare si conducono a' vertici degli angoli di esso bisegano questi angoli, e sono eguali tra loro,

102. Bisechiamo gli angoli del poligono regolare $ABDEFG$; allora poichè le rette che dal centro O si menano a' vertici del poligono anche bisegano gli angoli di esso, non potendo un angolo esser bisegato, che da una sola retta, ne segue che le rette le quali bisegano gli angoli di un poligono regolare non potranno esser diverse da quelle, che dal suo centro si menano a' vertici degli angoli di esso, e per conseguenza *le rette, che bisegano gli angoli di un poligono regolare passono pe'l suo centro.*

Essendosi dimostrate eguali le rette OA, OB OD, OE, OF, OG menate dal centro di un poligono regolare a' vertici degli angoli di esso, ed eguali essendo parimente i lati del poligono, perchè regolare, poicchè si sono dimostrati eguali ancora gli angoli OAB, OBD, ODE ec. tutt' i triangoli AOB, BOD, DOE ec. saranno eguali.

103. Quindi poicchè l' aja del poligono $ABDEFG$ è eguale a quella di tutt' i triangoli AOB, BOD DOE, EOF, FOG, GOA, menate dal punto O le perpendicolari OR, OI, OP, OQ, OL, OS sulle basi di tali triangoli rispettivamente, essa sarà eguale ad $AB.\ \frac{OR}{2}+BD\ \frac{OI}{2}+DE.$ $\frac{OP}{2}+EF.\ \frac{OQ}{2}+FG.\ \frac{OL}{2}+GA.\ \frac{OS}{2}$; ma dall' essere eguali i triangoli IOD, DOP, EPQ, FOK (48), ec., sono eguali tutte le perpendicolari OI, OP, OQ, OL ec., e quindi anche eguali sono le di

loro metà; dunque l'aja del poligono $ABDEFG$ sarà eguale ad

$$(AB+BD+DE+EF+FG+GA)\ \frac{OI}{2}$$

La perpendicolare OI dicesi apotema del poligono $ABCDEFG$. Quindi l' aja di un poligono regolare *è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del suo apotema*.

104. Poicchè sono eguali tutte le rette menate dal punto O a' vertici degli angoli A, B, D, E, F, G, del poligono regolare $ABDEFG$, se col centro O, e un raggio OA descriviamo una circonferenza di cerchio, questa passerà pe' vertici degli altri angoli del poligono, e ciascheduu lato del poligono regolare diverrà una corda di questa circonferenza.

Quando una circonferenza circolare passa per tutt' i vertici degli angoli di un poligono regolare, la circonferenza dicesi *circoscritta* al poligono e 'l poligono *iscritto* nella circonferenza. Dunque *ad ogni poligono regolare può esser circoscritto una circonferenza di cerchio.*

CAPO V.

Cerchio.

105. DIVIDIAMO una corda BD per metà in I, ed uniamo il punto I col centro O del cerchio; sarà ancora $OB=OD$; e quindi la retta OI passerà per due punti I, ed O rispettivamente equidistanti da B, e D; ma questa proprietà appartiene alla perpendicolare (14); dunque la OI sarà perpendicolare ad AD. Dippiù i due trian- Fig. 28

goli BOI, IOD come equilateri fra loro sono eguali; quindi sarà l'angolo
$BOI=DOI$, ossia prolungata OI in C, sarà l'angolo $BOC=DOC$, e per conseguenza (g. 1.°) arcBC=arcCD.

Sicchè ogni raggio, che passa per la metà di una corda sarà perpendicolare ad essa, e passerà ancora per la metà dell' arco sotteso dalla detta corda.

106. All' opposto, se dal centro O abbassiamo sulla corda BD una perpendicolare OI, dovendo questa in se riunire tutt' i punti, che serbano da B, e D egual distanza, il punto I, ov' essa incontra la corda BD dovrà trovarsi sulla metà della corda BD, e per esser allora eguali i due triangoli OBI, ODI, sarà l' angolo $BOC=DOC$, e quindi l' arco BC eguale all' altro DC, dal che ne conchiuderemo *che ogni raggio perpendicolare ad una corda passerà per la sua metà, e per la metà dell' arco, ch' essa sostende.*

107. Quindi, se divisa BD per metà in I, eleviamo da I una perpendicolare, poicchè questa in se riunisce tutt' i punti egualmente distanti da B, e D; ma il centro del cerchio dee ancora trovarsi ad egual distanza da' medesimi punti; essa dunque dovrà passare pe 'l centro, e perciò *la perpendicolare elevata sulla metà di una corda dovrà passare pe 'l centro del cerchio, cui appartiene la corda.*

108. Dunque se dato un cerchio AEG, vogliamo ritrovare il suo centro, poicchè questo dee ritrovarsi nella perpendicolare elevata sulla metà di una corda BD, e dee nel tempo stesso serbare egual distanza da tutt' i punti della circonferenza, soddisfaremo a queste due condizioni, se di-

visa per metà in I una corda BD menata a piacere, eleviamo dal punto I una perpendicolare IH, che prolungaremo fino all'incontro della circonferenza in C ed H; allora divisa CH per metà in O, poicchè il punto O si trova nel tempo stesso sulla CH perpendicolare sulla metà I della corda BD, ed ha dippiù egual distanza da' punti C, ed H della circonferenza, sarà esso il centro del cerchio, che si domandava.

109. Similmente se si domanda di compire una circonferenza di cerchio, di cui ne sia dato un arco MHE, non si dee che ritrovare il centro di quest' arco. Or poicchè, preso un punto N a piacere in quest' arco, e congiunte le corde MN, NE il centro di un tal arco dee insieme ritrovarsi nella perpendicolare elevata rispettivamente sulla metà di MN, e di NE, ne viene che divisa MN per metà in D, ed NE in C, ed elevate da' punti D, e C le perpendicolari DO, CO, sarà il punto O, ove queste s' incontrano il centro dell' arco MHE: quindi col centro O, e col raggio ON si compirà l' intiera circonferenza, di cui MHE n' era parte. Fig. 40

Dunque, se dato un' arco MFE, vogliamo dividerlo per metà; congiunta la corda ME, e ritrovato il centro O di un tal arco (prec.), si abbassi da O su di ME la perpendicolare OB, la quale si prolunghi finchè incontra l' arco in un punto F, sarà questo, che dividerà l' arco MFE per metà: infatti poicchè ogni raggio perpendicolare ad una corda passa per la metà dell' arco sotteso da questa, resterà l' arco MFE diviso per metà in F del raggio CF perpendicolare alla corda ME sottesa da un tal arco.

110. Si prendano nella circonferenza del cerchio MEN tre punti a piacere M, N, E; e si sup-

ponga dentro l'aja del cerchio un punto O tale, che congiunte le OM, ON, OE, queste tre rette siano eguali: congiungiamo i punti M, N, E colle rette MN, ME, NE, e divise due di esse MN, ME per metà ne' punti D, B, uniamo questi punti col punto O. Allora poicchè la OD passa pe' punti O, e D, che serbano rispettivamente da M, ed N egual distanza, sarà perpendicolare ad MN; e similmente sarà perpendicolare ad ME la OB, che passa per due punti O, e B egualmente distanti da M, ed E rispettivamente. Quindi il centro del cerchio MEN dovrà trovarsi insieme nelle due rette OD, OB che dividono pet metà, ed ad angoli retti rispettivamente le corde MN, ME (107); esso dunque sarà il punto O comune ad amendue; ma il punto O si è supposto ad egual distanza da' punti M, N, E; dunque *se da un punto esistente dentro di un cerchio possono condursi alla circonferenza più di due rette eguali, un talpunto sarà il centro del cerchio.*

111. Quindi dati tre punti M, E, N, che non siano per diritto, se si domanda far passare una circonferenza di cerchio per questi tre punti, tutto consiste a trovare un punto O equididistante da' punti dati M, E, N; sarà allora questo punto il centro del cerchio, che si domanda, ed una retta OM, OE, ON ne sarà il raggio. Supponiamo ritrovato un tal punto O; allora, congiunte MN, ME, se si dividano per metà ne' punti D, B, e si uniscano le DO, BO, queste riusciranno rispettivamente perpendicolari ad MN, ME, ed il punto O in quistione si troverebbe in queste perpendicolari: dunque all'opposto, congiunte le rette MN, ME, e divise rispettivamente per metà ne' punti D, e B,

se da questi punti si elevino le perpendicolari DO, BO, il punto O ove le perpendicolari si intersegano sarà il centro del cerchio in quistione. Infatti essendo DO perpendicolare su di MN, sarà $OM=ON$, e per la medesima ragione sarà $OM=OE$, e quindi poichè sono eguali le tre rette OM, ON, OE, se col centro O, e con una retta OM per raggio si descriva con un cerchio, questo dovrà passare per gli altri punti E, ed N.

Quindi, poichè il problema di circoscrivere una circonferenza circolare ad un triangolo è analogo a quello di far passare un cerchio per tre punti, sarà sempre possibile, dato un triangolo qualunque, circoscrivergli una circonferenza circolare.

112. Dippiù, presi nella circonferenza del cerchio $MHEF$ tre punti M, N, E; e unite le corde MN, ME, se queste si bisegano ne' punti D, e B, e da questi punti si elevino le perpendicolari DO, BO, poichè tanto il centro del cerchio $MHGF$, quanto quello del cerchio, che passa pe' tre punti M, E, N presi sulla sua circonferenza debbono trovarsi all' intersezione di quelle perpendicolari, sarà O il centro comune e del cerchio $MHEF$, e di quello, che passa per tre punti presi sulla sua circonferenza; e quindi poichè queste due circonferenze hanno de' punti di comune, avranno ancora uno stesso raggio e perciò una combacerà coll' altra, dal che ne segue, *che due circonferenze di cerchio non possono incontrarsi in tre punti senza confondersi, e che perciò per tre punti non vi può passare, che un solo cerchio.*

Nello stesso modo può dimostrarsi, che due

circonferenze circolari non possono aver di comune più di tre punti senza confondersi.

Dunque poichè si confondono in una le circonferenze circolari, che hanno più di due punti di comune, ne segue, che due circonferenze circolari distinte non possono avere di comune, che due punti, o un punto solo.

Le circonferenze de' cerchi, che hanno due punti di comune si dicono segarsi, come *MEN*, *PGT*, e quelle che hanno un sol punto di comune si dicono toccarsi, come le circonferenze *PGT*, *LHS*, o. *MEN*, *LHG*.

113. Ne segue da ciò, che se due circonferenze circolari distinte si segano, come *MEN*, *PGT* non potranno avere lo stesso centro; infatti se supponiamo che *O* sia il centro comune delle due circonferenze *MEN*, *PGT*, unito il centro *O* con uno de' punti *P*, ov'esse si segano, e menati un raggio *OG*, dovrà essere *OP* eguale tanto ad *OR*, che ad *OG*, il che non può accadere, se non quanto il punto *G* cade sul punto *R*, ossia quando queste circonferenze hanno tre punti di comune; ma in tal caso esse si confondono in una, e non sono più distinte; dunque è impossibile, *che due cerchi distinti, che si segano possano avere il centro di comune.*

Poichè i cerchi *MHN*, *LHS*, che si toccano al di fuori non hanno, che un sol punto *H* di comune, ogni altro punto come *I* diverso da *H* si troverà fuori del cerchio *MHN*; ma il centro del cerchio *LHS* dee esser un punto diverso da *H* preso sulla sua circonferenza (6); dunque il centro del cerchio, che tocca l'altro *MHN* esternamente si troverà al di fuori di questo, e non potrà perciò essere centro di tal cerchio (6); dal che ne segue, *che due cerchi, i quali si toccano*

al di fuori non possono avere il centro di comune.

114. Siano ora due cerchi LPG, LHS, i quali si toccano al di dentro: se supponiamo, che il punto I sia il di loro centro comune, dovrà essere $IL=IQ$, ed $IL=IR$, dal che se ne tira $IQ=IR$, cioè la parte eguale al tutto, il che essendo impossibile, ne segue, che ne anche due cerchi, *i quali si toccano al di dentro possono avere il centro di comune*. Fig. 40

Due cerchi distinti ABF, $A'B'F'$, che hanno lo stesso centro si dicono *cerchi concentrici*. Fig. 46

115. Dal centro C del cerchio ABF meniamo due raggi qualunque CA, CB, che faranno un angolo ACB detto *angolo al centro*; di poi da un punto qualunque F, E, D dell'arco AFB a' stessi punti A, e B meniamo le rette FA; FB; EA, EB; DA, DB; ne sorgeranno gli angoli AFB, AEB, ADB, che si dicono angoli *iscritti* nella porzione AFB. Ciò posto tre casi possono accadere nel congiungere i vertici degli angoli iscritti col vertice dell' angolo al centro, cioè o che la congiungente cada tra' lati degli angoli, o che si distenda sopra un lato dell' angolo al centro, o che cada fuori de' lati: supponiamo, che la congiungente il punto F col punto C cada fra lati, come FO; che quella, la quale unisce il puuto E col punto C si distenda su di AC come AE, e che finalmente la DH, la quale unisce il punto D col punto C cada fuori de' lati di questi angoli. Allora, poicchè ne' due triangoli FAC, BFC un lato FC si è prolungato, sarà l' angolo estremo $ACO= CAF+CFA$, e l'altro $OCB=CBF+CFB$ (36); or per essere $AC=CF$, è l'angolo $CAF=CFA$ (37), e

per la stessa ragione è ancora l'angolo $CBF=CFB$; dunque sarà l' angolo ACO doppio dell' angolo AFO, e l' angolo BCO doppio parimente dell' angolo BFO; e perciò tutto l' angolo ACB doppio dell'angolo AFB. Similmente nel triangolo ECB, per essersi il lato EC prolungato verso A, sarà l' angolo esterno ACB eguale a due interni, ed opposti CBE, CEB; e quindi, per esser questi fra loro eguali, perchè opposti a' lati eguali CE, CB, sarà esso doppio dal solo angolo AEB. Or essendo, per ciocchè ora si è dimostrato nel caso 2.º l'angolo HCB doppio dell'angolo HDB, e per la stessa ragione HCA parte del primo doppio di HDA parte del secondo, sarà ancora l' angolo ACB doppio dell' angolo ADB. Questo potendosi egualmente dimostrare in due cerchi distinti, ed eguali, in cui gli angoli iscritti e l' angolo al centro poggiano sù di archi eguali, generalmente ne conchiuderemo, *che in uno stesso cerchio, e quindi in cerchi eguali gli angoli al centro sono doppj degli angoli iscritti, co' quali poggiano sullo stesso arco, e quindi su di archi eguali.*

Dunque essendo l' angolo ACB doppio di tutti gli angoli iscritti nel segmento ADB; ne segue che tutti *gli angoli iscritti in una stessa porzione di cerchio sono eguali.*

Sicchè, data una porzione di cerchio, è dato l' angolo, di cui essa è capace.

116. Dippiù perchè l' angolo ACB è misurato dall' arco AB (9), saranno gli angoli AFB, AEB, ADB misurati dalla metà dell' arco AB, sul quale poggiano: e perciò *gli angoli iscritti in un segmento circolare sono misurati dalla metà dell' arco, su cui poggiano.*

117. Quindi se in un cerchio $BPRT$ congiungiamo quattro punti ad arbitrio B, P, R, T, colle rette BP, PR, RT, TB, ne sorgerà un quadrilatero $BPRI$, nel quale, poichè l' angolo in T è misurato dalla metà dell' arco RPB, e l' angolo in D opposto ad esso dalla metà dell' arco ATB, ambidue uniti insieme saranno misurati dalla metà dell' intera circonferenza, ossia da due retti (22); e dimostrando lo stesso per gli altri due angoli opposti in B, ed in R del quadrilatero $BPRI$, ne conchiuderemo, *che gli angoli opposti del quadrilatero iscritto nel cerchio sono eguali a due retti.* Fig. 41

Dunque il problema di far passare una circonferenza di cerchio per quattro punti non è capace di soluzione, se non nel solo caso in cui, congiunti con delle rette questi punti, gli angoli opposti del quadrilatero, che ne risulta, riescono eguali a due retti. Quindi ad un rombo, o ad un romboide non si può circoscrivere una circonferenza di cerchio (57).

118. Meniamo pe'l centro E di un cerchio ADG un diametro AE, che dividerà il cerchio in due semicerchi ADB, ASB; indi da un punto qualunque D, delle semicirconferenza ADB si menino agli estremi A, e B del diametro AB le rette DA, DB, e da punto qualunque F preso nell' arco DB si menino agli estremi D, e B dalla retta DB le rette FB, FD, si troverà allora l' angolo ADB iscritto nel semicerchio, l' angolo DAB nel segmento maggiore $DRSB$, e l' angolo DFB nel segmento minore DBF. Or essendo l'angolo ADB misurato dalla metà della semicirconferenza ASB, sarà retto (22); Quindi gli altri due angoli DAB, DBA del triangolo DAB eguaglieranno insieme un retto (36 2°), e perciò Fig. 43

sarà l' angolo DAB minore del retto, cioè acuto ma l' angolo DFB è supplemento dell' angolo DAB (117); dunque l' angolo DFB sarà ottuso, dal che ne conchiuderemo, che l' angolo iscritto *nel mezzo cerchio è retto; quello iscritto nella porzione maggiore è acuto, ed è ottuso l' angolo iscritto nella porzione minore.*

119. Quindi se sull' ipotenusa AB di un triangolo rettangolo ADB si descriva un semicerchio prendendo per centro il punto E metà di AB ed EA per raggio, supponendo, che esso passi per un punto O, o H diverso da D, sarà nel primo caso retto l' angolo AOB, e nel secondo lo sarà l' angolo AHB; ma per ipotesi è retto ancora l' angolo ADB; dunque nel 1.° caso sarà l' angolo esterno ADB eguale al suo interno ed opposto AOB, e nel 2.° sarà l' angolo esterno AHB eguale al suo interno, ed opposto ADB; ma questo è un assurdo, giacchè l'angolo esterno in un triangolo è maggiore di uno de' suoi interni, ed opposti (56,1°); dunque è assurdo ancora, che la circonferenza del cerchio descritta sul diametro AB ipotenusa dal triangolo rettangolo ADB passi per un punto diverso da D, dal che ne segue, *che se sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo come diametro si descriva un semicerchio, la semicirconferenza dovrà passare pe 'l vertice dell' angolo retto.*

Dunque se su di una stessa retta AB vi poggiano varj triangoli rettangoli, la linea, che unirà i vertici di essi sarà un arco di cerchio, il cui centro è il punto E metà di AB, e 'l raggio è la metà della stessa retta AB.

120. Seguitiamo ad occuparci della misura degli angoli per mezzo degli archi di cerchio, e per generalizzare le idee consideriamo due angoli qua-

lunque MKS, MIS, il primo che ha il vertice in un punto qualunque preso nell' aja di un cerchio, e l' altro, che ha il vertice fuori del cerchio. Si prolunghino le rette MK, SK finchè incontrano la circonferenza dell' altra parte. Ciò posto l' angolo MKS come esterno riguardo al triangolo SLK pareggia la somma degli interni ed opposti KLS, KSL; ma questi sono rispettivamente misurati dalla metà dell' arco MS, ed NL; dunque l' angolo MKS sarà parimente misurato dalla metà degli archi MS, NL, che tagliano i suoi lati MK, KS prolungati al di sotto, ed al di sopra del vertice.

Riguardo poi all' angolo MIS, bisogna osservare, che poichè l' angolo esterno MLS è eguale alla somma degli angoli MIL, IML, toltone di comune l'angolo IML, sarà l'angolo MIL, ossia $MIS = MLS - IML$, e quindi essendo gli angoli MLS, IML misurati rispettivamente dalla metà degli archi MS, NL ( ), sarà l' angolo MIL misurato dalla metà della differenza di due archi MS, NL, intercetti fra' suoi lati prolungati. Dunque *un angolo sarà misurato dalla metà delle somme de' due archi; che tagliano i suoi lati prolungati, o dalla metà della differenza degli stessi archi, secondochè il suo vertice è ad un punto qualunque preso dentro al cerchio, diverso dal centro, o è ad un putno preso fuori della sua circonferenza.* Quindi, congiunta la corda NL, se col centro M e col raggio NL descriviamo un cerchio, che taglia l' altro ASN ne' punti R, e Q, poichè in uno stesso cerchio a corde eguali corrispondono archi eguali (10), essendo le corde NL, RM, MQ eguali tra loro, eguali parimente saranno gli archi NL, RM, MQ; e sarà perciò l' arco SR

eguale a' due archi SM, NL, e si avrà parimente l'arco $SQ=SM-NL$; quindi sarà l'angolo MKS misurato dalla metà dell'arco RS, e l'altro MIS dalla metà dell'arco QS; allora condotte le corde RS, QS, sarà $RNLS$ il segmento di cerchio, ove gli angoli iscritti sono eguali all'angolo MKS, e $QLBS$ sarà il segmento, ove si troveranno iscritti gl' angoli eguali all' altro MIS.

121. Meniamo nel cerchio DAE una perpendicolare AB all' estremo A del raggio CA, e dal centro meniamo una retta CB, finchè incontra la perpendicolare in un punto B, allora essendo alla stessa retta AB la AC perpendicolare e la CB obbliqua, sarà CB maggiore di CA (18); quindi essendo $CA=CE$, sarà CB maggiore di CE, ma il punto E è sulla circonferenza del cerchio, dunque il punto B ne sarà fuori; e similmente dimostrando, che ogni altro punto diverso da A è fuori della circonferenza DAE, ne conchiuderemo, che la AB non incontra la circonferenza del cerchio, che nel solo punto A, ove si è elevata perpendicolare al raggio.

Fig. 41

Una retta, che incontra una circonferenza in un punto A, e che prolungata d'ambe le parti, ogni altro punto preso in essa si trova fuori della circonferenza che incontra, dicesi *tangente* del cerchio.

Dunque *la perpendicolare elevata sul raggio dal punto ove questo incontra la circonferenza riesce tangente di essa nel medesimo punto.*

122. Quindi se AB è una tangente, e dal centro C si meni il raggio CA al punto del contatto, se mai si supponga un' altra retta CB diversa da CA che sia perpendicolare ad AB, allora CA

sarà un'obbliqua ad AB (8), e quindi sarà maggiore della pretesa perpendicolare CB; ma è $CA=CE$; dunque da questa ipotesi ne risulterà CE maggiore di CB, cioè la parte maggiore del tutto, il che essendo un assurdo, è assurdo ancora che dal centro C si possa menare alla tangente AB una perpendicolare diversa da CA, che unisce il centro col punto del contatto, dal chè ne segue, che *la tangente è perpendicolare al raggio menato dal punto del contatto.*

123. Dunque se dal punto A di contatto si elevi una perpendicolare alla tangente AB; poicchè unendo il centro C col punto A del contatto, la CA è perpendicolare ad AB (prec.), non potendosi d'altronde dal punto A elevare (8) su della retta AB che una sola perpendicolare, questa perpendicolare elevata da A su di AB dovrà confondersi colla AC; e perciò *la perpendicolare elevata sulla tangente ad un cerchio dal punto del contatto dovrà passare pe'l centro dello stesso cerchio.*

124. Ne segue da ciò, che se due cerchi si toccano nello stesso punto A al di dentro, come DAM, PAQ, o al di fuori, come DAM, RAS; essi avranno a questo comun punto una comune tangente AB; ma abbiamo dimostrato, che la perpendicolare elevata sulla tangente del punto del contatto dee passare pe'l centro del cerchio; dunque se dal punto A di contatto eleviamo alla tangente AB una perpendicolare, essa dovrà passare pe' centri C, C', C'' de' cerchi che si toccano; e quindi il punto del contatto, ed i centri di questi cerchi saranno situati in una stessa retta; dal che ne segue, *che se due cerchi si toccano internamente, o esternamente, il punto*

del contatto, ed i centri de' cerchi si troveranno sulla stessa retta.

125. Quindi se si domanda descrivere un cerchio, che sia tangente di un altro DAM nel punto A; unito questo punto col centro C del cerchio DAM, e tagliata sul prolungamento di CA la retta AC'' eguale al raggio del cerchio; che si vuol menare tangente a DAM, se col centro C'' e col raggio $C''A$ si descriva un cerchio, sarà questo il cerchio domandato: infatti la perpendicolare elevata su di CC'' dal punto A è tangente comune dei due cerchi (121); ma questa non ha che il solo punto A di comune colle circonferenze di essi; dunque il solo punto A è comune ad ambidue le circonferenze che saranno perciò tangenti; che se i cerchi si debbano toccare al di dentro, allora si prenderà sulla AC una retta AC' eguale al raggio del cerchio, che si vuol menare tangente all' altro DAM, il punto C' sarà il centro di un tal cerchio, e $C'A$ il raggio; il che è chiaro (124).

Veniamo ora a sciogliere il problema di menare una tangente ad un cerchio, e sulle prime si domanda menare ad un cerchio EAM una tangente da un punto A preso sulla sua circonferenza; allora se AB fosse la tangente richiesta, l' angolo BAC sarebbe retto (122); quindi resterà sciolto il problema, unendo il centro C col punto A, ed elevando da A su di AC una perpendicolare AB, che sarà la tangente richiesta.

Se poi il punto da cui si vuol menare la tangente al cerchio DAM sia fuori di detto cerchio, come C'', egli è chiaro, che il problema si riduce a determinare nella circonferenza del cerchio DAM un punto M tale, che condotto il raggio CM, ed unito il punto M col punto C'';

sia $C''M$ perpendicolare a CM (122). Supponiamo l' angolo CMC'' retto; allora, divisa CC'' per metà in N; se col centro N, e col raggio NC si descriva un cerchio, questo dovrà passare pe'l punto M (119): dunque all' opposto, se sopra CC'' come diametro descriviamo un cerchio, i punti M, M'; ove questo segherà il cerchio DAN, saranno quelli, che sciolgono il problema: infatti congiunt' i raggi CM, CM', ed unito il punto C'' co' punti M, M', saranno retti i due angoli $C''MC$, $C''M'C$ come iscritti in un semicerchio (118); e quindi le rette $C''M$, $C''M'$ saranno le tangenti menate dal punto C'' al cerchio DAM (121).

126. Poichè la corda CM è eguale all' altra CM' come raggi di uno stesso cerchio $DM'AM$; sarà ancora l'arco CM eguale all' altro CM' (10); e quindi sarà l'angolo $CC''M = CC''M'$ (9,10); Allora saranno eguali i due triangoli $MC''C$; $MC''M'$; i quali hanno due angoli CMC'' (48) $CC''M$ rispettivamente eguali a' due angoli $CM'C''$; $CC''M$, ed un lato CC'' di comune; e sarà perciò $C''M = C''M'$; dal che ne conchiuderemo, che *le due tangenti che si menano ad un cerchio da un punto esistente fuori della sua circonferenza sono eguali*.

127. Dippiù poicchè il centro del cerchio $DM'M$ è sulla retta CC''; ma abbiamo dimostrato (prec.) l'angolo $MC''C = M'C''C$, con che la retta $C''C$ bisega l' angolo $MC''M'$ delle tangenti: dunque *il centro di un cerchio tangente i lati di un angolo dee trovarsi sulla retta, che bisega un tal angolo*.

128. Quindi se un cerchio MNP fosse insieme tangente a' tre lati di un triangolo ACB; il cen- Fig.45

tro di un tal cerchio dovrebbe ritrovarsi e sulla retta che biseca un angolo *ACB*, e su quella che bisega un angolo *CAB*; sicchè il centro di questo cerchio sarebbe *O*, ove queste due biseganti s' intersegano; allora essendosi supposto il cerchio *MNP* tangente a' tre lati del triangolo, se dal centro *O* si abbassino su questi le perpendicolari *OM*, *ON*, *OP*, queste saranno raggi del cerchio *MNP* (123); dunque se all' opposto si bisegano due angoli *ACB*, *CAB* di un triangolo *ABC*, e dal punto ove queste biseganti s' incontrano si meni la perpendicolare sopra uno de' lati del triangolo *ABC*, sarà *O* il centro, e quella perpendicolare sarà il raggio del cerchio, che toccherà insieme i tre lati *AB*, *AC*, *CB* del triangolo *ACB*.

Il cerchio *MNP*, che tocca i tre lati di un triangolo *ABC* dicesi *iscritto* nel triangolo, e'l triangolo i cui lati sono tangenti al cerchio dicesi circoscritto al cerchio.

Dunque *in un triangolo qualunque si può sempre iscrivere un cerchio.*

Fig. 36. 129. Similmente poicchè tutte le rette, che bisegano gli angoli di un poligono regolare *ABDEFG*, vanno a riunirsi in un punto *O* (101) dovendosi in ciascheduna di esse trovare il centro del cerchio, che tocca a due a due i lati del poligono *ABDEFG*, (127) sarà *O* il centro del cerchio che tocca tutt' lati *AB*, *BD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GA* del poligono *ABDEFG*; allora abbassando dal punto *O* su questi lati le perpendicolari *OR*, *OI*, *OP*, *OQ*, *OL*, *OS*, che d'altronde sappiamo essere eguali, (103) sarà una di queste perpendicolari il raggio del cerchio tangente a tutt' i lati del poligono regolare (123).

Questo cerchio tangente a tutt'i lati del poligono $ABDEFG$ si dice *iscritto* nel poligono, e'l poligono *circoscritto* al cerchio.

Dunque in ogni poligono regolare si potrà iscrivere un cerchio, e'l modo per sciogliere questo problema è quello di dividere due angoli del poligono per metà, e dal punto dove questi s'incontrano abbassare una perpendicolare sopra uno de'suoi lati. Quel punto d'incontro sarà il centro, e la perpendicolare sarà il raggio del cerchio, che si domanda, il che è chiaro per ciocchè si è detto.

130. Abbiamo veduto che la perpendicolare menata da un punto B al raggio BO è tangente del cerchio (121); meniamo ora dallo stesso punto B una qualunque obbliqua BM rispetto al raggio OB; ed abbassiamo su di essa dal centro una perpendicolare OP; allora essendo alla stessa retta BM, OP perpendicolare, ed OB obbliqua, sarà OP minore di OB; ma è $OB=OQ$; dunque sarà OP minore di OQ: il punto P cadrà perciò dentro del cerchio, e l'obbliqua qualunque siasi intersegherà la circonferenza del cerchio, dal che ne conchiuderemo, che *tra la circonferenza circolare, e la tangente non si potrà condurre veruna retta che non interseghi la stessa circonferenza.* Fig. 46

Quindi tra la tangente BC, e l'arco BQM non si può condurre una retta; e perciò l'angolo $MQBC$ detto *angolo del contatto* è il minimo di tutti gli angoli acuti rettilinei, ed in conseguenza l'angolo $NBQM$ suo complemento sarà il massimo di tutti gli angoli acuti rettilinei (a).

(a) Se co' centri infiniti di numero $O'O''O'''$... e co'raggi $o'B$, $o''B$,

Fig. 46 131. Meniamo del punto B una tangente AC, e condotta dallo stesso punto B una qualunque corda BM, si elevi la BN perpendicolare ad AB, e si prolunghi finchè incontra dall' altra parte la circonferenza nel punto N; indi si unisca il punto N col punto M; sarà retto l' angolo NMB, perchè iscritto nel semicerchio $NMQB$ (118); e quindi gli altri due angoli MBN, MNB del triangolo MBN saranno eguali ad un retto (36,2°); ma è retto l' angolo NBC; dunque sarà $NBC = MBN + MNB$; ma è $NBC = NBM + MBC$, sicchè sarà $NBM + MBC = NBM + MNB$; toltone di comune NBM, rimarrà l' angolo $MBC = BNM$: or ciascheduno degli angoli che sono iscritti nel segmento BNM è eguale all' angolo BNM (116); dunque sarà l' angolo MBC eguale a ciascheduno degli angoli iscritti nel segmento BNM. Dippiù condotte ad un punto Q preso nell' arco BM le corde BQ, MQ, sarà l'angolo BQM supplemento dell'angolo BNM (116); ma è ancora l'angolo MBA supplemento dell' angolo MBC; dunque, essendosi dimostrati eguali gli angoli BNM, MBC,

---

$O'''B$... si descrivano de' cerchi, questi saranno tangenti al cerchio BMN, e passeranno tutti tra la tangente BC, e l'arco BM. Questo forma un bel paradosso geometrico, cioè che mentre è impossibile che tra la tangente BC, e l'altro BQM vi passi una retta, vi possono poi passare infinite circonferenze distinte, che si vanno tutte a riunire in B. Questo paradosso ha dato luogo a varie opinioni, mentre alcuni, come il Pelletario, hanno negato che al contatto vi sia angolo, e per conseguenza sono stati costretti a dire, che la tangente nonchè un cerchio tocca un altro in una linea infinitamente piccola; altri come il Clavio, hanno scritto che l' angolo del contatto, e l' angolo rettilineo siano eterogenei, quasicchè non si considerasse nell' uno, e nell' altro l' inclinazione; ed altri hanno in varie maniere cercato di spiegare l' anzidetto paradosso. Quanto impegno in una cosa di semplice curiosità, e di niun utile? Chi desidera impiegar qualche ora di divertimento sull' oggetto potrà leggere tra gli altri il Clavio, e Tacquet.

saranno ancora eguali i loro rispettivi supplementi BQM, ABM.

Il segmento BNM dicesi *alterno* rispetto alla tangente BC, siccome l' altro segmento BMQ dicesi parimente alterno rispetto alla tangente AB: dal che ne segue, che *l' angolo compreso dalla tangente, e dalla corda menata al punto del contatto è eguale all' angolo fatto nell' alterna porzione di cerchio.*

132. Poicchè gli angoli iscritti nel segmento $BN'NM$ sono misurati dalla metà dell' arco BM, come anche ciascheduno degli angoli iscritti nel segmento BQM è misurato dalla metà dell' arco $BN'NM$, ne segue che anche gli angoli MBC, ABM sono misurati rispettivamente dalla metà dell' arco BM, BNH compresi tra rispettivi lati di essi, dal che se ne conchiude, che *l' angolo fatto da una tangente, ed una corda ha per una sarà la metà dell' arco compreso tra' suoi lati.*

La porzione BNM si dice *luogo geometrico* di tutti gli angoli, che sono eguali ad un angolo dato MBC ed i cui lati poggiano su di una stessa base BM.

133. Quindi data una retta BM, ed un angolo φ, ci è dato ancora il segmento circolare, che poggia sulla retta data, e che sia capace dell' angolo dato φ. Infatti per ritrovarlo supponiamo che $BMNN'$ sia questo segmento, sarà BNM eguale all' angolo φ (prec.); allora condotta dal punto B una tangente BC, sarà l' angolo $MBC = BNM = \varphi$; quindi elevata dal punto B una perpendicolare sopra di BC, dovrà in questa ritrovarsi il centro del segmento BMN (122); ed in tal caso l' angolo MBN che fa la retta data con

quella, che passa pe 'l centro del segmento è complemento dell' angolo MBC, ossia dell' angolo φ, ossia dell' angolo BNM, ed in conseguenza l' angolo NMB fatto all' altro estremo M della retta data sarà retto: dunque se all' opposto al punto B della retta MB data facciamo l' angolo MBN complemento dell' angolo φ, ed al punto M della stessa retta eleviamo una perpendicolare MN, la quale dee incontrare la BN, il punto N d' incontro apparterrà al segmento richiesto, e dovendo nella BN ritrovarsi il centro di esso (122), se si divida BN per metà in O, sarà questo il centro del segmento richiesto, ed ON il raggio: Infatti dietro questa costruzione l' angolo in N è complemento dell' angolo NBM di cui essendo anche complemento l'angolo φ per costruzione, sarà l'angolo in N eguale all' angolo φ; e quindi il punto N trovasi nel segmento capace dell' angolo, di cui per conseguenza il raggio sarà ON metà di BN, e 'l centro O.

134. Quindi se si domanda costruire una serie di triangoli che abbiano una data retta BM per base, ed abbiano l'angolo al vertice eguale ad un angolo dato φ, basta sulla retta BM costruire il segmento circolare BMN capace del dato angolo φ (prec.); sarà l' arco BNM il luogo di tutti quei punti, che soddisfano alle condizioni del presente problema. Infatti condotte da' punti N, N' ... presi sull' arco BNM le rette NB, NM; $N'B$, $N'M$ agli estremi B ed M della retta data BM, i triangoli BNM, $BN'M$ ... poggiano tutti sulla stessa base BN, ed hanno gli angoli BNM, $BN'M$, ... eguali.

125. Risolviamo ora alcuni altri problemi, che dipendono ancora dagli stessi principj.

Dato un cerchio BNM, *e dato un angolo* φ, *si domanda tagliare da questo cerchio un segmento capace del dato angolo.*

Supponiamo sciolto il problema, e che $BN'NM$ sia il segmento, che soddisfa alle sue condizioni: allora menando da un estremo B della corda BM su cui poggia il segmento $BN'NM$, la tangente AC, ne risulterà l' angolo MBC eguale all' angolo iscritto nel segmento $BN'NM$, e quindi eguale all' angolo φ. Dunque se all' opposto ad un punto qualunque B della circonferenza del cerchio dato vi meniamo una tangente AC, ed al punto B di contatto della retta BC formiamo l' angolo CBM eguale all' angolo φ, la retta BM taglierà dal cerchio dato il segmento $BN'NM$ capace dell' angolo dato φ. Infatti ciascheduno degli angoli iscritti nel segmento $BN'NM$ è eguale all' angolo MBC, e quindi all' angolo φ.

136. *Dato un cerchio, ed un triangolo qualunque* RST, *vogliamo iscrivere nel dato cerchio un triangolo equiangolo al triangolo dato.*

Se $BN'M$ fosse il triangolo rischiesto, e gli angoli $BN'M$, BMN' fossero rispettivamente eguali agli angoli SRT, RST, allora menata dal punto B una tangente AC, poicchè è l' angolo $ABN'=BMN'$, e l'altro $CBM=BN'M$ (131), sarebbe parimente l'angolo $ABN'=RST$, e l'angolo $CBM=SRT$. Dunque sè all'opposto ad un punto qualunque B della circonferenza circolare BMN' si meni una tangente ABC (125), ed indi al punto della CB si faccia l' angolo $ABN'=RST$, ed al punto B della AB si faccia l' angolo $CBM=SRT$, e si uniscono i punti N', M, ove le rette BN', BM incontrano rispettivamente la circonferenza, si sarà iscritto nel cerchio dato un tri-

angolo $BN'M$ equiangolo al triangolo RST. Infatti poichè i punti B, N', M per costruzione si trovano sulla circonferenza del cerchio BNM, egli è chiaro primieramente che il triangolo $BN'M$ è iscritto nel cerchio (104): dippiù gli angoli ABN'; CBM sono eguali agli angoli BMN', $BN'M$ del triangolo iscritto; ma essi sono per costruzione eguali agli angoli RST, SRT del triangolo dato; dunque i due angoli BMN', $BN'M$ del triangolo iscritto saranno rispettivamente eguali a' due angoli RST, SRT del dato triangolo, e quindi essi saranno equiangoli.

Se il triangolo RST fosse equilatero; il triangolo iscritto $BN'M$ sarebbe riuscito parimenti equilatero; e quindi per iscrivere in un cerchio un triangolo equilatero non si dee fare, che descrivere primieramente su di una retta qualunque un triangolo quilatero, ed indi iscrivere nel cerchio un triangolo equiangolo a questo.

Dunque nel cerchio si può iscrivere qualunque triangolo, di cui ne siano dati gli angoli. Vediamo se si può parimente circoscrivere al cerchio un triangolo qualunque i cui angoli siano dati.

Sia RST il triangolo, di cui se ne conoscono gli angoli, e supponiamo che il triangolo ADC sia quello che sodisfi alle condizioni del Problema: allora i lati AC, AD, DC saranno tangenti del cerchio BNM (128), cosicchè ritrovato il centro O del cerchio, e menate a' punti di contatto B, H, K le rette OB, OH, OK, saranno retti gli angoli OBA, OHA : OBC; OKC ec.; ed essendo gli angoli de' quadrilinei $ABOH$, $CBOK$ ec. eguali a quattro retti, la somma degli altri due BAH, BOH; BCK, BOK saranno rispettivamente eguali a due retti; cosicchè se

gli angoli BOH, BOK fossero rispettivamente supplementi di due angoli del triangolo dato SRT, STR, essendo essi risultati dall' analisi precedente anche supplementi degli angoli in A; ed in C rispettivamente, si avrebbe ancora l' angolo in A eguale all' angolo in R, l' angolo in C eguale all'altro in T, e'l triangolo ADC riuscirebbe equiangolo al triangolo RST. Dunque all' opposto resterà sciolto il problema, se prolungato un lato RS del triangolo RST verso I, ed L, si faccia al centro O del cerchio, e con qualunque raggio OB un angolo $BOH=SRI$, e $BOK=STL$, ed indi pe' punti B, H, e K si menino le tangenti AC, AD, DC, le quali prolungato finchè s' incontrano, formeranno il triangolo ADC, che soddisferà alle condizioni del problema: Infatti è chiaro sulle prime, ch' essendo gli angoli in B, in H, ed in K retti, se si prolunghi un raggio HO menato dal punto del contatto H, finchè incontra l' altra tangente AC nel punto F, sarà l'angolo AFH acuto, (36) e la somma degli angoli AFH, AHF essendo minore di due retti, le due tangenti AC, AD si dovranno incontrare: lo stesso potrà dimostrarsi per le altre: allora nel quadrilineo $ABOH$, poichè gli angoli in B, ed H sono retti, gli altri due BOH, BAH saranno eguali a due retti; ma a due retti sono parimente eguali gli angoli SRI, SRT; dunque saranno gli angoli BOH, BAH eguali agli altri SRI, SRT; e quindi toltine gli angoli eguali BOH, IRS, rimarrà l' angolo in A eguale all' angolo in R del triangolo dato: in simil modo potranno dimostrarsi eguali gli altri angoli de due triangoli ADC, RSI: sarà perciò il triangolo ADC il triangolo richiesto.

L' analisi pratticata è generale: dal che potremo conchiuderne che il problema di circoscrivere ad un cerchio un triangolo, di cui se ne conoscono gli angoli è sempre possibile.

Se gli angoli del triangolo *RSI* fossero tutt' eguali, il triangolo sarebbe equilatero, e 'l triangolo *ADC* sarebbe parimente riuscito equilatero: Dunque per circoscrivere al cerchio un triangolo equilatero, bisogna prima su di una retta formava un triangolo equilatero, ed indi circoscrivere al cerchio un triangolo equiangolo a questo.

Fig. 17 157. Passiamo ora ed osservare le massime, e le minime rette, che si menano ne' cerchi tanto da un punto situato nell' aja circolare, quanto da un punto preso fuori del cerchio. E sulle prime, trovato nel cerchio *ABIH* il centro *C*(108), meniamo il diametro *DE*, e due corde qualunque *FG*, *IH*, tali che la prima sia più vicina al diametro della seconda. Si abbassi dal centro *C* sulla *GF* la perpendicolare *CL*, resterà *GF* divisa per metà nel punto *L*: si unisca il punto *C* col punto *F*; allora nel triangolo *CLF* rettangolo in *L* sarà l' angolo *LCF* acuto; e quindi la retta *CF* opposta all' angolo maggiore sarà maggiore della retta *LF* opposta all' angolo minore, ed *FB* doppia di *CF* sarà parimente maggiore di *GF* doppia di *FL*; similmente si dimostrerà *BF* maggiore di ogni altra corda or *BF* è il diametro del cerchio; dunque *in ogni cerchio il diametro è la massima corda.*

158. Dal centro a' punti *G*, *I*, ed *H* si menino le rette *CG*, *CI*, *CH*, ne sorgeranno due triangoli *FCG*, *ICH*, ne' quali poichè i lati *GC*, *CF*; *IC* *CH* sono eguali come raggi dello stesso cerchio, e l' angolo *GCF* compreso da' primi è maggiore dell' angolo *ICH* compreso dagli al-

tri due, sarà la base GF maggiore di IH (51); ma la corda GF è più vicina al centro dell' altra IH; dunque *fra le corde, che si menano in un cerchio, quella che più si avvicina al centro è maggiore di quella, che più se ne allontana.*

139. Supponiamo ora che un'altra corda AB sia distante dal centro, quando lo è la corda GF: allora, abbassate rispettivamente su di esse dal centro le perpendicolari CO, CL, sarà $CO=CL$ (8, 1.°), e le corde AB, GF si troveranno divise per metà in O, ed in L rispettivamente (106); si congiungano i raggi, CA, CF, e per esser retti i due angoli CLF, COA, si avrà $CF^2=CL^2+LF^2$, e $CA^2=CO^2+OA^2$ (74); ma è $AC=CF$ come raggi dello stesso cerchio, e quindi $CA^2=CF^2$; dunque sarà parimente $CL^2+LF^2=CO^2+OA^2$: or per esser $CO=CL$, è ancora $CL^2=CO^2$; dunque tolte queste quantità eguali, rimarrà $LF^2=OA^2$, ed $LF=OA$, e per conseguenza sarà FG doppia di LF, eguale ad AB doppia di OA, dal che ne conchiuderemo, che *nel cerchio sono eguali le corde, le quali si allontanano egualmente dal centro.*

140. Vediamo, se l' inversa di questa è anche vera; cioè supponiamo eguali le corde AB, FG; saranno eguali parimente le di loro metà AO, FL; e quindi perchè è $AO^2+OC^2=FL^2+LC^2$, toltane le quantità eguali AO^2, ed FL^2, resterà $OC^2=LC^2$. ed $OC=LC$, cioe *nel cerchio le corde eguali si allontanano egualmente dal centro.*

141. Se data una retta A si domanda adattarla per corda nel cerchio $ABIH$, è chiaro, che resterà sciolto il problema prendendo per centro un punto qualunque H della circonferenza, e de-

scrivendo con un raggio eguale ad A un arco IP, che sega la circonferenza del cerchio nel punto I, allora unendo il punto H col punto I, la corda HI sarà eguale alla data retta A, giacchè HI, ed A sono per questa costruzione raggi dello stesso arco IP.

Poicchè il diametro è la massima di tutte le corde, ne segue, che questo problema sarebbe impossibile, se fosse A maggiore del diametro DE del cerchio $ABIH$.

142. Se le corde AB, DE sono parallele, abbassata, da punti A, e B le perpendicolari AM, BN, queste saranno eguali (25), e per essere le rette AO, OB rispettivamente eguali all' altre MC, CN, come lati opposti de' parallelogrammi AC, ON, siccome le prime sono eguali, eguali saranno parimente le altre due rette CM, CN, ed i triangoli ACM, BCN come equilateri tra loro saranno eguali, e sarà perciò l' angolo $ACE = BCD$, e quindi l' arco AE su cui poggia il primo sarà eguale all' arco BD, su cui poggia l' altro, dal che ne segue, che *in uno stesso cerchio due corde parallele tagliano archi eguali.*

Fig. 48 143. Meniamo ora da un punto O qualunque preso nel cerchio diverso però dal centro una retta OE, che passa pe 'l centro, e prolungata la EO finchè incontra la circonferenza nel punto A, si menino le rette OD, OP, e si faccia al punto C della retta OC l' angolo $OCB = OCP$; indi si congiunga OB. Ciò fatto; poichè è $CD = CE$, aggiunta OC di comune, sarà $OE = OC + CD$: ma è $OC + CD$ maggiore di OD (43); dunque sarà OE maggiore di OD: in simil modo potrà dimostrarsi OE maggiore di qualunque altra retta, che si mena da O ad un punto qualunque della circonferenza diverso di E; dunque OE

che passa pe 'l centro del cerchio sarà la massima delle rette, che si possono menare dal punto O *alla circonferenza.*

Dippiù è DC, e quindi AC minore di $DO+OC$ (43); toltone OC di comune, rimarrà AO minore di DO; e dimostrando in simil modo esser AO minore di tutte le altre rette menate dal punto O ad un punto qualunque della circonferenza diverso da A, ne dedurremo, *che* AO *rimanente porzione del diametro è la minima di tutte le rette, che dal punto* O *si possono menare alla circonferenza.*

Or i due lati OC, CD del triangolo OCD sono eguali a' due lati OC, CP del triangolo OCP, ma è l' angolo OCD maggiore di OCP; dunque sarà OD maggiore di OP; dal che ne conchiuderemo, *che delle rette, che dal punto* O *si menano a varj punti della circonferenza, quella che più si avvicina alla massima è maggiore di quella, che più se ne allontana*

Finalmente poichè nè due triangoli OCB, PCO sotto lati eguali rispettivamente OC, CB; OC, CP si comprendono angoli eguali OCB, OCP fatti dalla costruzione, sarà ancora $OB=OP$: ma ogni altra retta diversa da PO menata dal punto O, o si avvicina più alla massima e sarà maggiore di OB, o se ne allontana più e sarà minore (prec.); ed è dippiù l' angolo $POE=BOE$ e quindi $POA=BOA$; *dunque dal punto* O *non si possono condurre alla circonferenza più di due rette eguali; e queste saranno quelle, che fanno colla massima, o colla minima angoli eguali.*

144. Andiamo in fine a considerare le rette, che si menano da un punto M preso fuori della circonferenza a diversi punti di essa Q, e P: si

uniscano le rette CP, CQ, CD, CF, e menata pe'l centro la retta MCA, si faccia al punto C della retta MC l'angolo $MCN=MCQ$ e l'angolo $MCG=MCD$: allora, essendo $CA=CQ$; aggiuntoci di comune MC, sarà $MA=MC+CQ$; ma è $MC+CQ$ maggiore di MQ; dunque sarà MA maggiore di MQ: similmente potrà dimostrarsi MA maggiore di ogni altra retta menata dal punto M nelle parte concava della circonferenza: dunque *la maggiore di tutte le rette, che da un punto* M *preso fuori della circonferenza si menano nella parte concava di essa è quella che passa pe'l centro.*

Dippiù e $CQ=CP$; aggiuntavi MC di comune; saranno i due lati $MC+CQ$ del triangolo MCQ eguali a' due lati $MC+CP$ del triangolo MCP; ma è l'angolo MCQ compreso da' primi maggiore dell' angolo MCP compreso dagli altri; dunque sarà MQ maggiore di MP; dal che ne conchiuderemo *che delle rette menate da un punto preso fuori della circonferenza di un cerchio nella parte concava di esso, quella che più si avvicina alla massima, è maggiore di quella che più se ne allontana.*

Ora essendo eguali i due angoli MCQ, MCN compresi tra lati MC, CQ; MC, CN rispettivamente eguali, saranno eguali i triangoli MCQ MCN, e sarà $MQ=MN$, ma ogni altra retta diversa da MN, o si avvicina più alla massima e sarà maggiore di MQ, e più se ne allontana, e sarà minore, (prec.), ed è dippiù l'angolo $QMA=NMA$; dunque *da un punto* M *preso fuori di un cerchio non si possono menare alle parte concava di esso che due rette eguali; e queste saranno quelle, che fanno colla massima retta* MA *angoli eguali.*

145. Veniamo ora a considerare le rette, che giungono alla parte convessa: e sulle prime essendo $MF+FC$ maggiore di MC, toltone le grandezze eguali CF, CE, resterà MF maggiore di ME; e dimostrando in simil modo ogni altra retta, che menata dal punto M giugne alla parte convessa del cerchio, maggiore di ME, sarà ME la minima: dunque *delle rette, che da un punto preso fuori del cerchio si menano alla parte convessa di esso, la minima è quella, che prolungata passerebbe pe 'l centro.*

Or poichè è $MD+DC$ maggiore di $MF+FC$ (50), tolte via le grandezze eguali CD, CF, rimarrà MD maggiore di MF; dal che ne segue, *che tra le rette menate da un punto* M, *preso fuori del cerchio, alla sua parte convessa, quella ch' è più lontana dalla minima è maggiore di quella, che vi è più vicina.*

Finalmente essendo eguali gli angoli MCD, MCG compresi fra lati rispettivamente eguali MC, CD; MC, CG, saranno eguali i due triangoli MCD, MCG, e sarà $MD=MG$; ma ogni altra retta diversa da MG, o si avvicina più alla minima e sarà minore di MD, o più se ne allontana, e sarà maggiore (prec.); ed è dippiù l' angolo $DMC=GMC$; dunque *da un punto preso fuori di un cerchio non si possono menare alla parte convessa di esso, che due rette eguali, e queste saranno quelle, che fanno colla minima retta* ME *angoli eguali.*

146. Poicchè la tangente circolare può considerarsi come la più lontana dalla massima, e dalla minima insieme, ne segue, *che nel cerchio la tangente è la minima di tutte le rette, che si menano alla parte concava da un punto preso fuori di esso, ed è la massima di tutte le altre*

che si conducono dallo stesso punto alla parte convessa.

Quindi due rette, menate da un punto preso fuori del cerchio alla parte concava, e convessa di esso tendono a divenir sempre più eguali a proporzione, che si accostano alla tangente, e lo divengono finalmente quando amendue si sono riunite sulla tangente.

Allorchè due grandezze tendono sempre, avvicinandosi ad un altra a divenire eguali fra loro, ed a quella, questa dicesi *limite* di quelle due grandezze: dunque *due grandezze tendono sempre più a divenire eguali quanto più si accostano al loro limite.*

Noi ci serviremo in appresso di questa verità, alle quali ci ha guidata in questo luogo l' analisi delle nostre idee.

CAP. VI.

Ragioni, e Proporzioni

IDEE GENERALI;

L'ESAME, che finora abbiamo portato sulle parti limitate dello spazio non riguardano, che la di loro eguaglianza, e diseguaglianza. Se generalizzizziamo le idee ci si presenterà questo problema universale ,, *due grandezze qualunque della stessa specie qual rapporto hanno fra di loro rispetto alla quantità?* Egli è chiaro che il solo paragone di esse può menarci alla soluzione del sudetto problema. Considerate le grandezze sotto questo punto di veduta, ne risulterà un'altro vantaggio, qual è quello di paragonare due gran-

dezze di una specie a due di altra specie. Infatti il principio di sopr' apposizione, che ne' capitoli precedenti ha guidato le nostre ricerche non può applicarsi, che allorchè si hanno grandezze della stessa specie: una linea non può esser sopr'apposta, che su di un'altra linea; ma siamo sempre nel grado di paragonare più linee con più superficie, o solidi, per osservare qual rapporto vi è tra queste grandezze separatamente, e vedere quindi com' è il rapporto quantitativo che hanno più linee fra di loro rispetto a quello, che hanno fra loro un egual numero di superficie, o di solidi.

148. Il rapporto di due grandezze della stessa specie fatto circa la quantità chiamasi da' Geometri *ragione*, ed *esponente*, o *quantità di ragione* è ciocchè l' indica. La ragione di due grandezze A, e B si esprime nel seguente modo $A : B$, ove A chiamasi *antecedente*, e B *conseguente*, ed ambidue si dicono termini della ragione. Or in qualunque modo si paragonano due grandezze il risultato di un tal paragone non sarà che in vedere o di quanto l'antecedente eccede il conseguente o quante volte lo contiene. Quindi due specie di ragioni si distinguono, delle quali la prima si chiama aritmetica, e la seconda geometrica, e per conseguenza l' esponente di $A : B$ nella prima sarà $A-B$, ed $\frac{A}{B}$ nella seconda. Noi ci occuperemo in preferenza della geometrica.

149. Da ciocchè si è detto ne segue che due ragioni saranno eguali, quando i loro esponenti sono eguali, e reciprocamente; e se l'esponente di

una ragione è maggiore, o minore dell'esponente di un'altra ragione, anche la prima ragione sarà maggiore o minore della seconda, e reciprocamente. L'eguaglianza di due ragioni si chiama *proporzione*.

Quindi una proporzione o è composta di quattro termini, come $A : B = C : D$, e dicesi *discreta*, o costa di soli tre termini, come $A : B = B : C$, ove il conseguente della prima ragione è l'antecedente della seconda, e dicesi *continua*.

150. Sia $A : B = C : D$ una proporzione; si avrà $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$: or affinchè A possa contenere B tante volte quanto C contiene D, fa d'uopo, che se A è maggiore, eguale, o minore di B, lo stesso dee esser C rispetto a D, e se A è maggiore, eguale o minore di C; lo stesso dee esser B riguardo a D; dal che se ne conchiude, ***che in ogni proporzione, se il primo termine è maggiore, eguale, o minore del secondo, sarà ancora il terzo maggiore, eguale, o minore del quarto, e se il primo termine è maggiore, eguale, o minore del terzo, sarà ancora il secondo maggiore, eguale, o minore del quarto.***

Dunque se il primo termine di una proporzione è il massimo; essendo esso maggior del terzo, sarà il secondo maggior del quarto, ed essendo dippiù maggior del secondo per ipotesi, sarà anche il terzo termine maggior del quarto, e perciò questo sarà il minimo.

151. Supponiamo $A = B$, e C una terza grandezza della stessa specie; A e B conterranno C egual numero di volte, ed all' opposto; quindi

sarà $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$; e $\frac{C}{A}=\frac{C}{B}$ (148), e perciò A : $C=B$: C, e C : $A=C$: B (149); dunque *due grandezze eguali hanno la stessa ragione ad una terza, e reciprocamente.*

152. Se all'opposto si abbia $A : C=B : C$, o $C : A=C ; B$, sarà $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$; e $\frac{C}{A}=\frac{C}{B}$ (149) ne'quali A, e B contenendo, ed essendo contenuti rispettivamente da C uno stesso numero di volte, saranno eguali; dal che ne segue, che *se due grandezze hanno egual ragione ad una terza, ed all' opposto, saranno eguali.*

153. Che se sia $A>B$; allora si avrà $\frac{A}{C}>\frac{B}{C}$; e poichè C conterrà minor volte la grandezza maggiore, che la minore, sarà $\frac{C}{A}<\frac{C}{B}$: dunque sarà $A:C>B:C$, e $C:A<C:B$ (149); e perciò *di due grandezze diseguali, la maggiore serba ad una terza grandezza maggior ragione, che non vi ha la minore; e la terza grandezza ha alla maggiore minor ragione di quella che serba alla minore.*

154. Segue da ciò, che se si abbia $A : C>B : C$, o pure $C : A<C : B$; sarà nel primo caso $\frac{A}{C}>\frac{B}{C}$ (149); cioè A conterrà C più volte di quello, che la contiene B; e quindi sarà $A>B$ e nel secondo caso poi si avrà $\frac{C}{A}<\frac{C}{B}$ (149), con che contenendo C meno volte A, che B sarà parimente $A>B$: dal che ne segue, che se

si ha $A : C > B : C$, *o pure* $C : A < C : B$, *sarà in ambidue in casi* $A > B$.

155. Sia ora $A : B = C : D$; ed $E : F = C : D$; sarà $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ per la ragione prima, e per la seconda $\frac{E}{F} = \frac{C}{D}$, (149) quindi si avrà $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$, e per ciò $A : B = E : F$ (149); cioè *se due ragioni sono eguali ad una terza; saranno eguali fra di loro.*

156. Veniamo ora a trasformare le ragioni. E sulle prime se si ha una proporzione $A : B = C : D$, poicch' è $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, moltiplicando queste due grandezze eguali per la stessa BD sarà ancora $\frac{A \times B \times D}{B} = \frac{C \times B \times D}{D}$, ossia $AD = BC$; dal che ne segue *che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medj,*

Dunque, se supponiamo all' opposto che sia $A \times D = B \times C$, affinchè regga questa ipotesi, allorchè i fattori di questi prodotti si sciolgono in proporzione, bisogna, che i fattori di un medesimo prodotto formino i termini estremi della proporzione, o pure i medj.

Allorchè quattro grandezze A, D, B, C sono tali che le prime formano i termini estremi di una proporzione, e le altre due i termini medj, o all' opposto, le A, e B si diranno esser *reciprocamente proporzionali* all' altre D, e C. Quindi *i prodott' eguali hanno i fattori reciprocamente proporzionali.*

Dunque nella proporzione continua *il pro-*

dotto de' termini estremi è eguale al quadrato del termine medio.

157. Da quanto si è detto se ne deduce, che se si ha una proporzione $A : B = C : D$, dovendo essere $A \times D = B \times C$ (156), dividendo queste grandezze per la stessa grandezza $D \times C$, si avrà $\frac{A \times D}{C \times D} = \frac{B \times C}{D \times C}$, ossia $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$; perciò sarà $A : C = B : D$: dunque *in ogni proporzione la ragione degli antecedenti è eguale a quella de' conseguenti.*

Allorchè in una proporzione si paragonano gli antecedenti tra di loro, e tra di loro i conseguenti, la proporzione dicesi *permutare*, o *alternare*.

Quindi poichè la ragione non è che il paragone di due grandezze omogenee circa la quantità, ne segue, che una proporzione non si può alternare, se tutt' i termini di essa non siano omogenei.

158. Similmente se si ha una proporzione $A : B = C : D$, poichè è $A \times D = B \times C$, dividendo queste grandezze eguali per $A \times C$, sarà $\frac{A \times D}{A \times C} = \frac{B \times C}{A \times C}$, ossia $\frac{D}{C} = \frac{B}{A}$, e perciò sarà $B : A = D : C$. Se si ha la ragione di $A : B$, il paragone del conseguente B all' antecedente A dicesi *inversa* della prima; quindi *una proporzione non perde il carattere di proporzione, se i termini, che la formano s' invertano.*

159. Essendo nella proporzione $A : B = C : D$, $A \times D = B \times C$, aggiugnendo e sottraendo da que-

ste due quantità eguali la stessa grandezza $B\times D$, si avrà

$A\times D\pm B\times D=B\times C\pm B\times D$, ossia

$$(A\pm B)D=(C\pm D)B,$$

e dividendo per $B\times D$, sarà

$$\frac{(A\pm B)D}{B\times D}=\frac{(C\pm D)B}{B\times D}$$

ossia

$$\frac{(A\pm B)}{B}=\frac{(C\pm D)}{D}$$

da cui se ne deduce $A\pm B : B=C\pm D : D$.

Cioè in ogni proporzione *la somma, o la differenza dell' antecedente, e conseguente, della prima ragione è al suo conseguente, come la somma, o la differenza dell' antecedente, e conseguente dell' altra ragione è al suo conseguente.*

Allorchè in una ragione si paragona la somma dell' antecedente, e conseguente al suo conseguente, la ragione si dice *comporre*, e quando si paragona l' eccesso dell' antecedente sul conseguente allo stesso conseguente, la ragione si dice *dividere*.

160. Finalmente se la grandezze $A\times D=B\times C$ sorte dalla proporzione $A : B=C : D$ si tolgano dalla stessa quantità $A\times C$; si avrà $A\times C-A\times D=A\times C-B\times C$ ossia $(C-D)A=(A-B)C$: si dividano queste due grandezze eguali per la stessa quantità $(A-B)(C-D)$, si avrà

$$\frac{(C-D)A}{(A-B)(C-D)}=\frac{(A-B)C}{(A-B)(C-D)},$$

ossia $\frac{A}{A-B}=\frac{C}{C-D}$, e quindi sarà $A : A-B=C : C-D$; e perciò in ogni proporzione $A : B=C : D$ l'antecedente A è al suo eccesso sul conseguente B, come l'antecedente C è al suo eccesso sul conseguente D.

Quando in una ragione si paragona l'antecedente all'eccesso del medesimo sul suo conseguente, la ragione si dice *convertere*.

161. Supponiamo, che l'esponente $\frac{A}{B}$ della ragione di $A : B$ possa sciogliersi ne'fattori $\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$ ...; sarà allora $A : B=C : D\times E : F$. La ragione di $A : B$ si dirà in tal caso composta delle ragioni di $C : D$, e di $E : F$, e si esprimerà nel seguente modo $A : B=(C : D)(D : F)$ dunque *una ragione si dice composta di più ragioni semplici, quando il suo esponente è eguale al prodotto degli esponenti delle ragioni componenti.*

162. Quindi se si ha $A : B=(C : D)(E : F)$, poicchè dee essere $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$(prec.)$=\frac{C\times E}{D\times F}$ essendo $\frac{A}{B}$ l'esponente della ragione di $A : B$ e $\frac{C\times E}{D\times F}$ l'esponente della ragione di $C\times E : D\times F$ ed essendo dippiù questi eguali, sarà $A : B= C\times E : D\times F$ (149), dal che nè segue, *che una ragione composta di più ragioni semplici può esibirsi alla maniera di una ragione semplice,*

paragonando cioè il prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti.

163. Tiriamo da questi principj il rapporto di due ragioni $A : B$, e $C : D$; si chiami M l'esponente della prima, ed N quello della seconda, sarà $M=\frac{A}{B}$, ed $N=\frac{C}{D}$, e quindi $\frac{M}{N}=\frac{A}{B} : \frac{C}{D}=\frac{A\times D}{C\times B}=\frac{A}{C}\times\frac{D}{B}$; e perciò sarà $M : N=(A : C)(D : B)$ (162); ossia rimettendo in luogo di M, ed N le rispettive ragioni eguali, si avrà $(A : B) : (C : D)=(A : C)(D : B)$.

Nelle ragioni di $A : B$, o $C : D$, il rapporto degli antecedenti è $A : C$; e quello de' conseguenti è $B : D$; quindi la ragione di $D : B$ è *l'inversa* di $B : D$ (158), e questa chiamasi perciò *diretta*. Da ciò *ne conchiuderemo che due ragioni, e quindi i loro esponenti nella loro ragion composta della diretta degli antecedenti, e dell'inversa di conseguenti.*

164. Quindi se P, e Q indicano gli esponenti di due ragioni eguali $A : B$, e $C : D$; sarà $P=Q$ (149), ma è $P : Q=(A : C)(D : B)$, per ciocchè si è detto (prec.); e dippiù essendo per ipotesi $A : B=C : D$, sarà permutando $A : C=B : D$, con che si vede che la ragione di $D : B$ è l'inversa di $A : C$; dunque la ragione degli esponenti eguali P, e Q sarà composta di due ragioni, delle quali una è inversa dell'altra, dal che ne segue che due ragioni *una diretta, e l'altra inversa della prima formano il carattere di eguaglianza di due grandezze, che sono tra loro nella ragion composta di esse.*

165. Segue da ciò, che se l'esponente $\frac{A}{B}$ della ragione di $A : B$ diviene $\frac{Am}{Bm}$, poichè $\frac{Am}{Bm}$ è nella ragion diretta di Am, e nell' inversa di Bm, l' esponente $\frac{A}{B}$ ha dovuto ricevere un aumento di valore nel numeratore A per quanto è m; e per altrettanto è diminuito nel denominatore B; sicchè sarà $\frac{Am}{Bm}=\frac{A}{B}$, e quindi $A : B=Am : Bm$= Dunque *se i termini di una ragione si moltiplicano per una qualunque grandezza* m, *la ragione non si altera.*

Quindi, essendo $Am : Bm=A : B$ (prec.), ne segue, che *i prodotti, i quali hanno un fattore comune, sono nella ragione degli altri fattori.*

Dippiù la stessa proporzione $Am : Bm = A : B$, ci dimostra che *una ragione non si altera, se i suoi termini si dividano per una stessa grandezza.*

166. Da quanto si è detto (165) segue, che poicchè si ha

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C\times D}{C\times D\times B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{D}\times\frac{D}{B}$$; perciò si avrà

$A:B=(A:C)(C:D)(D:B)$ (161), dal che se conchiude che *se tra due grandezze* A, *e* B *s' insinuano altre grandezze* C, D *ec.; la prima* A *all' ultima* B *sarà in ragione composta delle grandezze intermedie cioè come* (A : C) (C : D) (D : B).

Quindi se A, B, C sia in continua proporzione, sarà in virtù di tale supposizione $A : B = B : C$; ma si ha, per ciocchè ora si è detto si $A : C = (A : B)(B : C)$; sicchè sostituendo ad una di queste ragioni componenti l'altra, sarà $A : C = (A : B)(A : B)$, o pure $A : C = (B : C)(B : C)$, ossia $A : C = A^2 : B^2$, oppure $A : C = B^2 : C^2$.

La ragione da quadrati di due grandezze B, e C, ossia $B^2 : C^2$ si dice ragion *duplicata* riguardo a quella che hanno tra loro le grandezze $B : C$. Dunque *se tre grandezze sono continuamente proporzionali, la prima alla terza sarà in ragion duplicata della prima alla seconda, o della seconda alla terza.*

Similmente se si hanno quattro grandezze A, B, C, D continuatamente proporzionali, poichè si ha $A : D : : (A : B)(B : C)(C : D)$, sostituendo una di esse a piacere alle due altre, si avrà $A : D = A^3 : B^3 = B^3 : C^3 = C^3 : D^3$.

La ragione de' cubi di due grandezze A, B si dice *triplicata* di quella, che hanno tra loro le grandezze. *Quindi se quattro grandezze sono continuamente proporzionali, la prima all'ultima sarà in ragion triplicata della prima alla seconda, o della seconda alla terza, o della terza alla quarta.* E generalmente si potrà dimostrare nello stesso modo, che *se un numero* $n+1$ *di grandezze sono continuamente proporzionali, la prima all'ultima sarà in ragione nniplicata della prima alla seconda, o della seconda alla terza ec.*

167. Passiamo ora ad osservare le proprietà che si osservano in due serie di grandezze ligate fra loro con un rapporto. E sulle prime, se nelle due serie di grandezze,

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D \\ M, & N, & O, & P \end{matrix}$$

sia continuamente $A : B = M : N$

$$B : C = N : O$$
$$C : D = O : P,$$

la prima serie si dirà aver ragione ordinata alla seconda;

E se sia

$$A : B = Q : P$$
$$B : C = N : O$$
$$C : D = M : N$$

la prima serie si dirà aver ragion pertubata alla seconda.

168. Segue da ciò, che, poichè nella prima serie è $A : D = (A : B)(B : C)(C : D)$, e nella seconda è $M : P = (M : N)(N : O)(O : P)$(166), essendo in ambidue i casi eguali le ragioni componenti di $A : D$, e di $M : P$, si avrà $A : D = M : P$, dal che se ne conchiude, che *se una serie di grandezze è in ragion ordinata, o perturbata con altra serie, la prima, ed ultima grandezza di ambidue le serie formeranno una proporzione.*

169. Dunque se P, e Q indicano gli esponenti delle ragioni $A : B$; ed $A : C$; le quali hanno lo stesso antecedente; sarà $P = \frac{A}{B}$, e $Q = \frac{A}{C}$, cioè $\frac{P}{1} = \frac{A}{B}$, ed $\frac{B}{1} = \frac{A}{C}$, e quindi $P : 1 = A : B$, e $Q : 1 = A : C$; s' inverta questa seconda proporzione, e paragonandola alla prima, si avrà $P : 1 = A : B$, $1 : Q = C : A$; quindi le gran-

dezze P, 1, Q avranno ragion pertubata alle altre C, A, B, e sarà perciò $P : Q = C : B$ (prec.); cioè $(A : B) : (A : C) = C : B$; dal che ne siegue *che le ragioni, e gl' esponenti delle ragioni, che hanno gli stessi antecedenti sono in ragion inversa de' loro conseguenti.*

170. Vediamo ora come sono le ragioni, che hanno gli stessi conseguenti: siano P, e Q gli esponenti delle ragioni $A : B$, e $C : B$; sarà $A : B = P : 1$, e $C : B = Q : 1$, permutiamole ambidue, e si avrà $A : P = B : 1$, e $C : Q = B : 1$; e quindi $A : P = C : Q$, e permutando $A : C = P : Q$, ossia $(A : B) : (C : B) = A : C$; quindi ne conchiuderemo, *che le ragioni, ed i loro esponenti, che hanno lo stesso conseguente sono in ragion diretta degli antecedenti.*

171. Poicchè in una proporzione $A : D = M : P$, se A è maggiore, eguale o minore di D, anche M sarà maggiore, eguale, o minore di P, (150) ne segue, che in una serie di grandezze A, B, C, D, la quale è in ragion ordinata o perturbata con altra serie M, N, O, P, se *la prima grandezza* A *nella prima serie è maggiore, eguale, o minore dell' ultima* D, *sarà anche la prima grandezza* M *nell' altra serie maggiore, eguale o minore dell' ultima* P.

172. Da quanto si è detto segue ancora, che se sia $A : B = C : D$, e si abbiano insieme quattro grandezze M, N, O, P tali che sia $M : A = O : C$, del $N : B = P : D$, poicchè: invertendo quest' ultima, si ha $B : N = D : P$, si avranno le tre proporzioni

$$M : A = O : C$$
$$A : B = C : D$$
$$B : N = D : P$$

e quindi le grandezze M, A, B, N avranno ragione ordinata alle altre O, C, D, P, ma le prime, ed ultime grandezze di una serie ordinata formano una proporzione (168); dunque sarà $M:N=O:P$, dal che ne conchiuderemo, *che se di quattro grandezze* M, N, O, P *due* M, *ed* O *siano proporzionali agli antecedenti di una proporzione, e due altre* N, *e* P *a' conseguenti, saranno anch' esse proporzionali.*

173. Siano le due serie di grandezze A, B, C, D; M, N, O, P in ragion ordinata; sarà $A:B=M:N$, e componendo $A+B:B=M+N:N$; ma è $B:C=N:O$; dunque le tre grandezze $A+B$, B; C sono in ragion ordinata colle tre grandezze $M+N$, N, O; e quindi sarà $A+B:C=M+N:O$, e componendo si avrà $A+B+C:C=M+N+O:O$; mo è $C:D=O:P$, sicchè le tre grandezze $A+B+C$, C, D sono in ragion ordinata colle tre grandezze $M+N+O$, O, P; e sarà perciò $A+B+C:D=M+N+O:P$, e componendo $A+B+C+D:D=M+N+O+P:P$; e potendo dimostrare sempre lo stesso, ne conchiuderemo, che *se due serie di grandezze sono in ragion ordinata, sarà l'intiera prima serie all' ultima grandezza, che forma parte di essa, come l'intiera seconda serie alla sua ultima quantità.*

174. Quindi se le grandezze A, B, C, D; M, N, O, P sono della stessa specie, e sono eguali le ragioni di $A:M$, di $B:N$, di $C:O$, di $D:P$; si avrà permutandole

$$A:B=M:N$$
$$B:C=N:O$$
$$C:D=O:P$$

e perciò le grandezze A, B, C, D avranno ragion ordinata alle altre M, N, O, P(167); e sarà per conseguenza $A+B+C+D : D=M+N+O+P : P$ (prec.), e permutando $A+B+C+D : M+N+O+P=D : P$, ma è $D : P=A : M=B : N=C : O$ dunque ne conchiuderemo, *che se tra grandezze emogenêe vi sono più ragioni eguali, sarà la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.*

175. Si abbiano ora due proporzioni $A : B=P : Q$; $C : B=D : Q$, ne' quali si ravvisano gli stessi conseguenti; si permutino, e si avrà della prima $A : P=B : Q$ .... (1^a), e dalla seconda $C : D=B : Q$ ... (2^a), con che essendo le due ragioni di $A : P$, e di $C : D$ eguali alla stessa ragione di $B : Q$, sarà $A : P=C : D$, e permutando, $A : C=P : D$, e componendo, e dividendo insieme $A \pm C : C=P \pm D : D$, e permutando di nuovo $A \pm C : P \pm D=C : D$; ma dalla (2^a) ha $C : D=B : Q$; dunque sarà infine $A \pm C : P \pm D=B : Q$: e perciò *se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, sarà la somma, o la differenza degli antecedenti delle prime ragioni alla somma, o alla differenza degli antecedenti delle seconde ragioni, come i conseguenti comuni.*

179. Supponiamo, che due grandezze $A+B$, $M+N$ sia proporzionali a due di loro parti rispettivamente, p, e, sia $A+B : M+N=A : M$; sarà permutando $A+B : A=M+N : M$, e convertendo $A+B : B=M+N : N$, e permutando di nuovo sarà $A+B : M+N=B : N$; dal che ne conchiudiamo, *che se due grandezze* A+B, M+N *siano proporzionali a due di loro parti* A, *ed* M *rispettivamente, le rimanenti parti* B, *ed* N

saranno ancora proporzionali alle intiere grandezze.

177. Sia ora nella proporzione $A : B = C : D$, A la massima, e quindi D la minima; vediamo com' è la somma della massima, e della minima rispetto alle altre due grandezze. Si chiami $A-C$, A', e B' la differenza $B-D$; sarà $A=A'+C$, e $B=B'+D$: quindi essendo per supposizione $A : B=C : D$, sostituendo per A, e B i loro rispettivi valori, si avrà $A'+C : B'+D=C : D$, e permutando sarà $A'+C : C=B'+D : D$, e convertendo $A'+C : A'=B'+D : B'$; ma per essere A la massima, sarà $A'+C$ suo equivalente maggiore di $B'+D$; dunque sarà ancora A' secondo termine dell' ultima proporzione maggiore di B' termine ultimo; e quindi aggiugnendo a queste due grandezze diseguali la medesima quantità $C+D$, si otterrà $(A'+C+D)$ maggiore di $(B'+C+D)$, e mettendo A in luogo di $A'+C$, e B in luogo di $B+D$, sarà infine $(A+D)>(B+C)$; da cui ne conchiuderemo *che in ogni proporzione, in cui il primo termine è il massimo, la somma della massima, e minima grandezza sarà maggiore della somm a delle altre due.*

CAPO VIII.

Applicazione alla quantità continua de' principj dimostrati sulle ragioni, e proporzioni.

178. Le verità dimostrate nel precedente capo generalizzano le teorie geometriche esposte finora. Noi anderemo in questo capo a sviluppare i rapporti degli angoli, delle linee, e delle superficie che formano l' oggetto della Geometria piana.

Principiamo dal rilevare le verità le più generali, e che faremo servir di base allo sviluppo di altre conseguenze.

Sulle prime osserviamo qual rapporto hanno fra di loro due parallelogrammi AE, ak, che supponiamo di avere la stessa altezza. Quì due casi possono accadere; o le basi AF, al sono commensurabili, o no. Lo siano in primo luogo, ed una retta M considerata con unità di misura lineare sia contenuta in AF un numero m di volte, ed in al un numero di volte disegnato da n; sarà $AF=Mm$, ed $al=Mn$, e quindi $AF:al=m:n$ (165): si taglino da AF le parti AD, DF eguali ad M, e da al le parti ad, df, fg, gl .... eguali ad M, e da' punti delle divisioni D, d, f, g si menino DC, dc, fe, gh parallele rispettivamente ad AB, ab: in tal caso i parallelogrammi parziali, che ne sorgeranno AC, DE; ac, de, fh saranno tutti eguali, per aver basi eguali, per costruzione, e per ipotesi la stess' altezza. Allora i parallelogrammi AE, ak conterranno tante volte rispettivamente uno de' parallelogrammi parziali, quante volte le loro basi AF, al contengono la linea M; ossia AE conterrà BC un numero m di volte, ed al la conterrà un numero di volte designato da n; cioè sarà $\frac{AE}{ak}=\frac{m}{n}$, ed $\frac{AF}{al}=\frac{m}{n}$; quindi si avrà $AE:ak=m:n$(149), ed $AF:al=m:n$; dunque sarà parimente $AE:ak=AF:al$, cioè *i parallelogrammi, che hanno la stess' altezza sono in ragion delle basi commensurabili.*

Siano ora incommensurabili le basi AF, al; si tagli $af=AF$, e dal punto f si meni fe parallela ad ab; saranno eguali i due parallelogram-

mi AE, ae, che poggiano su basi eguali AF, af, ed hanno la medesima altezza (61): allora se non è $ae : ak = af : al$, sarà $ae : ak$ come una grandezza o maggiore, o minore di af è ad al. Sia in primo luogo $ae : ak$ come am maggiore di af è ad al: Indi supponiamo, che al sia divisa in parti eguali ciascheduna più piccola di fm: è chiaro, che un punto o di divisione cadrà fra f, ed m: si tiri dal punto o la retta on parallela ad ab; allora i due parallelogrammi an, ak avranno le basi commensurabili; e sarà perciò $an : ak = ao : al$; ma è per supposizione $ae : ak = am : al$, sicchè permutando queste due proporzioni, si avrà dalla prima $an : ao = ak : al$ e dall' altra $ae : am = ak : al$; e perciò sarà $an : ao = ae : am$, e permutando $an : ae = ao : am$; ma è an maggiore di ae; dunque sarà ao maggiore di am, il che essendo un assurdo, non è possibile, che sia $ae : ak = am : al$. Nello stesso modo può dimostrarsi, che non è $ae : ak$ come una grandezza minore di af è ad al; dunque anche nel caso presente i parallelogrammi ae, ak, ossia AE, ak sono in ragion delle loro basi: E perciò potremo conchiuderne generalmente, che *i parallelogrammi, i quali hanno eguali altezze, sono nella ragion delle basi.*

Fig. 49

179. Quindi essendo $AE : ak = \frac{AE}{2} : \frac{ak}{2}$ (165); poicchè $\frac{AE}{2}$ è eguale al triangolo ABF, ed $\frac{ak}{2}$ pareggia il triangolo abl (60); sarà $ABF : abl = AE : ak$; ma abbiamo dimostrato $AE : ak = AF : al$; sicchè sarà parimente $ABF : abl = AF : al$; e perciò *anche i triangoli, che hanno eguali altezze sono in ragion delle basi.*

180. Da ciò possiamo tirarne una verità, ch' è l' inversa della precedente: infatti siano i due triangoli ACE, EOG che hanno basi eguali AE, EG, ma diseguali altezze: allora abbassate da' vertici C, ed O degli angoli in C, ed in O sulle basi AE; EG, rispettivamente le perpendicolari CD, OF, e tagliata dall' altezza maggiore CD una parte $DH=OF$, se si unisce il punto H co' punti A, ed E, ne risulterà il triangolo AHE eguale all'altro EOG (61). In tal caso avendo i due triangoli HED, CED la stess' altezza DE, si avrà $HED : CED=HD : CD$ (prec.); ma per la stessa ragione è $HAD : CAD=HD : CD$; dunque sarà $HED : CED=HAD : CAD$; e permutando si avrà $HED : HAD=CED : CAD$, e componendo, e di nuovo permutando sarà $AHE : ACE=HAD : CAD$; ma è $HAD : CAD=HD : CD=OF : CD$; dunque sarà parimente AHE, ossia $OEG : ACE=HD : CD$, dal che ne conchiuderemo *che i triangoli i quali hanno basi eguali sono in ragion delle altezze.*

Fig. 50

181. Quindi compiti co' lati AE, EC; OE, EG e cogli angoli AEC, OEG rispettivamente i parallelogrammi EK, EI (57), essendo il parallelogrammo $AKCE$ all' altro $EOIG$ come il triangolo ACE è all' altro EOG, sarà ancora $AKCE : EOIG=CD : OF$, e perciò *anche i parallelogrammi, che hanno basi eguali sono in ragion delle altezze.*

182. Da questi principj ne dedurremo il rapporto de' parallelogrammi AE, HN e de' triangoli ACB, HMI, che hanno diseguali basi, ed altezze. A tal effetto preso una retta BI eguale alla base del parallelegrammo HN, e da un punto D preso in essa elevataci una perpendicolare, si tagli da es-

Fig. 51

sa DC eguale all' altezza dell' altro parallelogrammo AE; indi congiunto il punto H col punto C si compia colle rette CH, HI il parallelogramme HK, il quale avrà la base eguale a quella della parallelogrammo HN, e l' altezza del parallelogrammo AE. Ciò posto si ha $AE : HN$ o $ACB : HMI = (AE : HK)(HK : HN)$ (165, 166); ma è $AE : HK = AB : HI$ (178); ed è $HK : HN = CD : MO$ (181); dunque sarà $AE : HN$, o $ACB : HMI = (AB : HI)(CD : MO)$, cioè i *parallegrammi, ed i triangoli che hanno diseguali basi, ed altezze sono in ragion composta delle basi, e delle altezze*.

183. Che se due parallelogrammi qualunque AC, OE o due triangoli AOC, GOF avessero un angolo $AOC = GOF$, allora disposti in modo, che due lati AO, OF facciano linea continuata, nel qual caso per l' eguaglianza degli angoli AOC, GOF anche OC, OF saranno retta continuata, e compito il parallelogrammo OD, si avrà $BO : OE = (BO : OD)(OD : OE)$ (166), ed $AOC : GOF = (AOC : COF)(COF : GOF) = (BO : OD)(OD : EO)$ (165); ma è $BO : OD = AO : OF$, ed è $OD : OE = OC : OG$ ed egualmente $AOC : COF = AO : OF$; e $COF : GOF = CO : OG$ (180, 181); dunque sarà $BO : OE$, o $AOC : GOF = (AO : OF)(OC : OG)$, dal che ne conchiuderemo, *che i parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno un angolo eguale sono nella ragion composta de' lati, che sono intorno gli angoli eguali*. Fig. 52

184. Se i due parallelogrammi AE, HN fossero eguali in aja; allora costruito il parallelogrammo HK, che abbia la base eguale a quella di uno de' due parallelogrammi eguali, p. e., HN, e l'altezza eguale a quello dell' altro parallelogrammo AE, Fig. 51

poicchè i due parallelogrammi eguali AE, HN serbano a questo egual ragione, sarà $AE:HK=HN:KN$; ed essendo parimente eguali i due triangoli ACB, HMI, si avrà $ACB:HCI=HMI:HCI$; ma è $AE:HK=AB:HI$ (178), $HN:HK=OM:DC$; ed egualmente $ACB:HCI=AB:HI$; $HMI:HCI=OM:CD$ (180); dunque sostituendo a quelle queste ragioni eguali si avrà tanto per i parallelogrammi, quanto per i triangoli $AB:HI=OM:CD$, dal che ne conchiuderemo, che i *parallelogrammi*, *ed i triangoli equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.*

185. Che se sia in due parallelogrammi AE, HN o in due triangoli ACB, HMI, $AB:HI=OM:CD$, allora costruito il parallelogrammo HK che abbia la base dell'uno di essi HN, e l'altezza dell' altro AE, e menata la diagonale CI, si avrà $AB:HI=AE:HK$, ed $OM:CD=HN:HK$ (178,181); e similmente sarà per i triangoli $AB:HI=ACB:HCI$, ed $OM:CD=HMI:HCI$; ma per supposizione è $AB:HI=OM:CD$; dunque sarà egualmente $AE:HK=HN:HK$, ed $ACB:HCI=HMI:HCI$; e quindi si avrà $AE=HN$, ed $ACB=HMI$ (152) dal che ne conchiuderemo, che i *parallelogrammi*, *ed i triangoli, che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono eguali in aja.*

186. Quindi se due parallelogrammi BO, ON, o due triangoli AOC, MOF hanno eguali gli angoli AOC, MOF, disposti in modo che i lati AO, OF; MO, OC facciano rette continuate e compito con OF, ed OC l' altro parallelogrammo OD; allora nella supposizione, ch' essi siano eguali rispettivamente, si avrà $BO:OD=ON:OD$ (151), ed $AOC:COF=MOF:$

Fig. 52

COF : ma è $BO : OD = AO : OF$, ed ON : $OD = MO : OC$ (179), ed egualmente AOC : $COF = AO : OF$, e $MOF : COF = MO : OC$, dunque sarà tanto per i parallelogrammi, quanto per i triangoli $AO : OF = OM : OC$, cioè *i parallelogrammi, ed i triangoli equivalenti, e che hanno dippiù un angolo eguale, hanno i lati intorno quest' angolo reciprocamente proporzionali*.

187. Che se, restando la medesima supposizione degli angoli eguali AOC, MOF, fossero reciprocamente proporzionali i lati AO, OC; OF, OM tanto de' parallelogrammi BO, ON, quanto de' triangoli AOC, MOF, compito con i lati OF, OC il parallelogrammo OD, e condotta la diagonale CF; poicch'è $AO : OF = OM$: OC, sarà $BO : OD = ON : OD$, e $AOC : COF = MOD : COF$ (178, 179), e quindi sarà $BO = ON$, ed $AOC = MOF$ (152): quindi l' inversa della precedente è anche vera, cioè saranno *eguali due parallelogrammi, e due triangoli, se hanno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali*.

188. Segue da ciò, che se quattro rette A, B, C, D sono proporzionali, costruito con A, e D il rettangolo OM, che abbia i lati AM, AO rispettivamente eguali ad A, e D, e fatto con B, ed C il rettangolo FN, che abbia i lati DN, DF rispettivamente eguali a B, e C; poicch' è per supposizione $A : B = C : D$, sarà $AM : DN = DF : AO$: quindi i due rettangoli OM, FN hanno intorno gli angoli eguali i lati reciprocamente proporzionali; saranno perciò equivalenti (prec.); ma è il rettangolo OM contenuto dalle rette A, e D, e l' altro FN compreso dalle rette B, C; sicchè sarà il rettangolo fat- Fig. 41

to dalle rette A e D eguale a quello, che si forma dalle rette B e C. E perciò, se *quattro rette sono proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme* A, D *è eguale a quello compreso dalle medie* B, *e* C.

L'inversa è anche vera: infatti se il rettangolo contenuto dalle rette A, e D è eguale a quello compreso dalle altre B, e C, costruito con A, e D, il rettangolo OM, e con B, e C l'altro FN, sarà $OM=FN$, e quindi $AM : DN=DF : AO$ (186) cioè $A : B=C : D$.

189. Poicchè un parallelogrammo pareggia il rettangolo fatto dalla sua base, e dalla sua altezza, ed un triangolo è eguale al rettangolo della sua base per la metà della sua altezza, ne segue, che per essere un parallelogrammo equivalente ad un triangolo, dee essere la base del primo a quella del secondo, come la metà dell'altezza di questo è all'altezza del parallelogrammo (a).

190. Meniamo nel triangolo ABC una retta KF parallela ad un lato AC, ed uniamo AF, CK; Fig. 54 saranno equivalenti i due triangoli KAF, KCF,

(a) Le verità dimostrate in questo capo avrebbero potuto ricavarsi come conseguenze di ciocchè abbiamo dimostrato nel capo precedente. In fatti considerati i parallelogrammi, come prodotti delle loro basi per le altezze, ed i triangoli come prodotti delle loro basi per la metà delle loro altezze, egli è facile conchiuderne che due qualunque parallelogrammi, o triangoli sono in ragion composta delle basi, ed altezze; che essendo eguali le basi, sono in ragion delle altezze; che essendo eguali le altezze sono in ragion delle basi; che un parallelogrammo è ad un triangolo in ragion composta dalla base del primo alla base del secondo, e dell'altezza del primo alla metà dell'altezza del secondo; che allorchè le basi sono in ragion reciproca delle altezze, tanto i parallelogrammi, che i triangoli sono eguali, ed all'opposto; che se un parallelogrammo è equivalente ad un triangolo, la base del parallelogrammo dovrà essere alla base del triangolo, come la metà dell'altezza di questo all'altezza di quello; ma noi abbiamo voluto recarne anche le dimostrazioni geometriche.

che poggiano sulla stessa base KF, e sono racchiusi fra le medesime parallele; quindi essi avranno egual ragione al triangolo KBF (151), cioè sarà $KFA : BFK = CKF : BKF$; ma perchè i due triangoli KFA, BFK hanno la stess' altezza, è $KFA : BFK = AK : KB$, e per la stessa ragione è $CKF : BKF = CF : FB$; dunque sarà $AK ; KB = CF : FB$; cioè *se in un triangolo si mena una retta parallela ad un lato, gli altri due lati resteranno divisi proporzionalmente.*

191. Supponiamo all'opposto che sia $AK : KB = CF : FB$, ma è $AK : KB = AFK : BFK$, e $CF : FB = CKF : BKF$ (179); dunque sarà $AFK : BFK = CKF : BKF$; quindi sarà $AFK = CKF$ (152); ma questi due triangoli poggiano sulla stessa base KF; dunque saranno racchiusi fra le medesime parallele (62), cioè sarà KF parallela ad AC, dal che ne segue *che se due lati di un triangolo si dividono proporzionamente, la retta, che unisce i punti di divisione, sarà parallela all' altro lato.*

192. Quindi menate da' punti F, E, D presi a piacere in un lato BC del triangolo ABC, le parallele FK, EG, DI al lato AC, e condotte da medesimi punti le FO, EN, DM parallele ad AB, il triangolo NEC ci darà la proporzione $CF : FE = Nr : rE$; il triangolo FDp ci darà $FE : ED = pq : qD$, e dal triangolo GBE avremo $ED : DB = GI : IB$ (190): or è $Nr = AK$ come lati opposti del parallelogrammo KN, e per la stessa raggione è $rE = KG$; sicche sostituendo sarà $CF : FE = AK : KG$; $FE : ED = KG = GI$; ED, $DB = GI : IB$; dunque le parti CF, FE, ED, DB sono in ragion ordinata colle altre AK, KG, GI, IB (167), dal che

ne segue, che *se in un triangolo* ABC *si menano da varj punti* F, E, D *presi in uno de' suoi lati* BC *delle parallele* FK, EG, DI *al lato* AC, *queste divideranno l' altro lato* AB *in parti che avranno ragion ordinata alle parti* CF, FE, ED, DB.

Dunque data una retta AB indivisa, ed un' altra BC divisa nelle parti BD, DE, EF, FC, possiamo dividere la prima in parti proporzionali alle parti di BC, se inclinandola sotto un angolo qualunque ABC, e congiunta AC, da punti D, E, F si menino le rette DI, EG, FK parallele ad AC.

193. Andiamo a sciogliere alcuni problemi, che dipendono da questi principj. *Dato un punto* N *dentro dell' angolo* ABC, *si domanda menare per questo punto una retta* AC *tale che le parti di questa* AN, NC *intercette tra il punto dato, ed i lati dell' angolo rispettivamente siano eguali.*

Supponiamo sciolto il problema, e che sia $AN=NC$, allora, menata dal punto N una retta NE parallella ad AB, poicchè ne viene AN: $NC=BE$: EC, essendo $AN=NC$, sarà ancora $BE=EC$. Dunque se all' opposto, menata dal punto N una retta NE parallela ad AB, si tagli $EC=EB$, e pe' punti C, ed N si faccia passare la retta CNA, rimarrà la CA bisogata in N: infatti si ha AN : $NC=BE$: EC, e quindi, siccome è $BE=EC$ per costruzione, così sarà ancora $AN=NC$.

Fig. 55 195. *Data una retta* AB *: si cerca dividerla in numero qualunque di parti eguali.*

Se la retta AB fosse in realtà divisa nel numero richiesto di parti eguali AK, KL, LM, MN, NB; è chiaro che fatto al punto A della

retta AB un angolo a piacere BAD, e menata dal punto B una retta BI, se da' punti N, M, L, K si menano le rette NG, MI, LF, KC parallele a BI, la retta AG verrà ad esser divisa nelle parti AC, CF, FG, GH, HI, le quali saranno in ragion ordinata alle altre AK, KL, LM, MN, NB, e perciò saranno eguali fra loro, e saranno tante di numero quante sono queste. Dunque se all' opposto, fatto al punto A della retta AB un angolo a piacere BAM, si prenda nella AM un punto C, ed indi vi si prendano le parti CF, FG, GH, HI tutte eguali ad AC, e che con AC facciano il numero richiesto, congiungendo il punto B col punto I, e da' punti C, F, G, H menando le rette CK, FL, GM, HN perallele a BI, queste divideranno la AB nel numero richiesto di parti eguali. Infatti in virtù della costruzione le parti di AI sono in ragion ordinata colle parti di AB; quindi, come quelle, queste saranno eguali fra loro, e saranno perciò tante di numero, quanto sono le parti di AI, ossia quante è il numero richiesto (150).

196. Quindi data una retta, possiamo da essa troncarne una qualsivoglia sua parte. Infatti se si domanda p. e. la quinta parte di AB, basterà dividerla in cinque parti eguali, o pure preso sopra di AD, che faccia con essa un angolo qualunque, un punto C, si taglino su di AD quattro altre rette CF, FG, GH, HI eguali ad AC, e congiunta IB, dal punto C gli si meni la parallela CK, sarà la AK la quinta parte di AB; poicchè si ha $IC : CA = BK : KA$ e componendo $IA : AC = BA : AK$; dun-

que siccome AC si contiene cinque volte in AI così AK sarà la quinta parte di AB.

197. *Date tre rette* A, B, C, *vogliano ritrovare la quarta proporzionale in ordine ad esse.* Supponiamo, che nel triangolo BAC la retta EC rappresenti questa quarta proporzionale, e le rette AD, DB, AE siano A, B, C: allora dovendo essere $AD{:}DB=AE{:}EC$, saranno parallele le rette DE, BC, che uniscono i punti D, E, B, C: dunque all'opposto, se fatto un angolo a piacere MAN, si tagli $AD=A$, $DB=B$, $AE=C$, e congiunta DE, dal punto B gli si meni la parallela BC, la retta EC sarà la quarta proporzionale richiesta. Infatti in virtù della costruzione si ha $AD{:}DB=AE{:}EC$ (190), ossia $A{:}B=C{:}EC$.

Fig. 56

199. Dunque se sulla retta A si domanda costruire un rettangolo eguale ad un rettangolo dato PQ, tutto si riduce a ritrovar l'altezza, che conviene per la base A, affinchè ne risulti il rettangolo domandato. Sia X quest' altezza, dovrà esser $A\times X=PS.PR$ (98) e quindi $A{:}PS=PR{:}X$ (155) dunque resterà sciolto il problema, se in ordine alla retta data, ed alla base, ed altezza del rettangolo dato si ritrovi una quarta proporzionale.

199. Quindi se si vuol ritrovare in ordine a due rette A, C la terza proporzionale, basterà, fatto un' angolo qualunque MAN, tagliare su' suoi lati indefiniti $AD=A$, $DB=C$, $AE=C$: allora congiunta DE, e condottagli dal punto B la parallela BC, sarà EC la terza proporzionale richiesta. Infatti in virtù della costruzione fatta è (190) $AD : DB=AE : EC$, ossia $A : C=C : EC$; e sarà questa perciò la terza proporzionale richiesta.

200. Dunque se su di una retta A si domanda

costruire un rettangolo eguale ad un quadrato dato, il cui lato è PS; tutto si riduce a ritrovar l' altezza di questo rettangolo: supponiamola ritrovata, e sia X; sarà $A \times X = PS^2$, e quindi $A : PS = PS : X$; dal che apparisce, che resterà sciolto il problema, se in ordine ad A, e 'l lato del quadrato dato si ritrovi una terza proporzionale.

201. Si divida l' angolo DAE di un triangolo DEA per metà con una retta AF; indi dal punto E si meni EG parallela ad AF; allora essendo eguali a due retti gli angoli AFE, FEG (51) poicchè l' angolo AFE com' esterno è maggiore dell' angolo ADE, i due angoli ADE, GED saranno minori di due retti; quindi la retta DA prolungata incontrerà la EG; si prolunghi perciò finchè l' incontra in un punto G: in tal caso poicchè l' angolo DAF è eguale al suo corrispondente DGE, e l' angolo FAE pareggia l' angolo AEG come suo alterno, essendo per costruzione eguali i due angoli DAF, FAE, eguali saranno parimente i due angoli AGE, AEG; e quindi sarà $AE = AG$: or nel triangolo GDE, perchè AF è parallela ad EG si ha $DF : FE = DA : AG$ (190); sostituendo per AG la sua eguali AE, si avrà $DF : FE = DA : AE$, dal che ne segue *che se un angolo di un triangolo si divida per metà per mezzo di una retta, il lato opposto a quest' angolo resterà diviso dalla medesima retta in parti proporzionali a' lati che comprendono l' angolo diviso per metà.*

Fig. 56

202. Supponiamo per l' opposto, che nel triangolo DAE il lato DE sia diviso in F in parti proporzionali agli altri due lati, cioè che sia $AF : FE = DA : AE$, e vediamo se la

retta AF, che unisce il vertice dell' angolo opposto a DE col punto F divide per metà l' angolo DAE: si prolunghi DA, e dal punto E si meni una parallela ad AF, la quale si distenda finchè incontra la DA in un punto G; allora, per essere AF parallela a GE, si avrà $DF : FE = DA : AG$; ma è per supposizione $DF : FE = DA : AE$; dunque sarà parimente $DA : AE = DA : AG$, e quindi sarà $AE = AG$ e l' angolo $AGE = AEG$; ma è l' angolo AEG eguale all' angolo FAE, come suo alterno, ed è dippiù l' angolo AGE eguale all' angolo DAF, come suo corrispondente; dunque sarà l' angolo DAF eguale all' angolo FAE; dal che se ne conchiude che *se un lato di un triangolo si divide proporzionalmente agli altri due lati, la retta che unirà il punto di divisione col vertice dell' angolo opposto dividerà per metà quest' angolo.*

203. Meniamo nel triangolo DGE la retta AF parallela ad EG; e la retta AI parallela a DE il triangolo DAF sarà equiangolo al triangolo DGE, la figura FI sarà un parallelogrammo (57); e si avrà $EF : FD = GA : AD$ (190), e componendo, e permutando sarà $ED : DG = FD : DA$. Similmente si ha $GA : AD = GI : IE$, e componendo sarà $GD : DA = GE : EI$, ossia per essere $EI = AF$, $GD : DA = GE : AF$, e permutando $DG : GE = DA : AF$; nello stesso modo si dimostrerà $DE : EG = DF : FA$. $GD : DE = AD : DF$. Quindi i due triangoli DAF, DGE equiangoli hanno i lati intorno gli angoli eguali proporzionali.

I geometri hanno chiamate simili quelle figure, che sono equiangole, ed hanno intorno gli angoli eguali i lati proporzionali, e propriamen-

te quelli, che sono opposti agli angoli eguali. Questi diconsi lati omologhi.

Dunque *i triangoli equiangoli sono simili.*

204. Segue da tutto ciò, che i poligoni regolari dello stesso numero de' lati sono simili. Infatti siano $ABCDEF$, $abcdef$ due poligoni regolari dello stesso numero di lati; saranno eguali tutti gli angoli in A, B, C, D, E, F, del poligono $ABCDEF$, come anche gli angoli in a, b, c, d, e, f dell'altro poligono $abcdef$ (100). Quindi supponendo questi poligoni di un numero n di lati, ciascun angolo in A, ec. in a, ec. di questi poligoni sarà la parte nnesima della somma degli angoli in A, in B, in C, in D, in E, in F; in a, b, c, d, e, f rispettivamente. Or la somma di tutti gli angoli sì del poligono $ABCDEF$, che dell' altro $abcdef$ è eguale a tante volte due retti quanti lati esso ha meno due (99): dunque siccome il numero de'lati di questi due poligoni è eguale, così la somma degli angoli del poligono $ABCDEF$ è eguale alla somma degli angoli del poligono $abcdef$; e quindi eguale sarà ancora ciascheduno degli angoli in A in a, ec. de' medesimi, come parti eguali di queste somme eguali: dunque i due poligoni $ABCDEF$, $abcdef$ saranno equiangoli. Dippiù essendo tutt' i lati del poligono $ABCDEF$ eguali tra di loro, come sono tra di loro eguali i lati del poligono $abcdef$, giacchè essi si sono supposti regolari, le ragioni de' lati del primo poligono tra di loro e di quelli dell' altro poligono saranno ragioni di eguaglianza, e sarà perciò

Fig. 57

$$AB : BC = ab : bc$$
$$BC : CD = bc : cd$$

ec.

Sicchè avendo noi dimostrati i poligoni *ABCDEF abcdef*, equiangoli, ed avendo dippiù dimostrati proporzionali i lati intorno gli angoli eguali, essi saranno simili; per cui bisogna conchiuderne, che *due poligoni regolari dello stesso numero de' lati sono simili.*

205. Siano i due poligoni simili $ABCDEF$, $abc-def$, e siano AB, BC, CD, DE, EF i lati omologhi rispettivi ad ab, bc, cd, de, ef; si avrà $AB : BC = ab : bc$; $BC : CD = bc : cd$; $CD : DE = cd : de$; $DE : EF = de : ef$; $EF : FA = ef : fa$ (203); e permutando queste ragioni, si avranno le seguenti $AB : ab = BC : bc$; $BC : bc = CD : cd$; $CD : cd = DE : de$; $DE : de = EF : ef$; $EF : ef = FA : fa$; quindi sarà $AB+BC+CD+DE+EF = ab+bc+cd+de+ef$ (174) come uno degli antecedenti AB è al suo conseguente ab; ma è $AB+BC+CD+DE+EF$ il perimetro del poligono $ABCDEF$, siccome è $ab+bc+cd+de+ef$, il perimetro del poligono $abcdef$; e ciascuno antecedente al suo conseguente sono lati omologhi ne' due poligoni: dunque *i perimetri de' poligoni simili sono tra loro come i lati omologhi.*

Quindi poichè i poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono simili, ne segue che i perimetri de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono frà loro come i lati omologhi, cioè come due lati qualunque, essendo tutti eguali i lati de' poligoni regolari.

206. Siano GF, gf due lati di due poligoni regolari di uno stesso numero di lati, e quindi simili; si biseghino gli angoli AGF, EFG; agf, efg colle rette GO, OF, go, of rispettivamente, e dal punto O, ove convengono le due prime si abbassi OL perpendicolare a GF, sicco-

Fig. 39

me si abbassi da o, ove convengono le altre due la ol perpendicolare a gf: OG, ed OL saranno rispettivamente i raggi del cerchio circoscritto, ed iscritto nel primo poligono, siccome og, ed ol saranno ancora i raggi rispettivi del cerchio circoscritto, ed iscritto nel secondo poligono (103,104). Ciò posto, poicchè gli angoli AGF, GFE agf, gfe come angoli appartenenti a poligoni regolari dello stesso numero di lati, e quindi simili, sono eguali (100), saranno ancora eguali gli angoli loro metà rispettive OGF, OFG, ogf, ofg; e quindi i triangoli GOF, gof saranno equiangoli, e perciò simili (203); come pure lo saranno i triangoli rettangoli GOL, gol, che hanno gli angoli acuti OGL ogl eguali (36,5°); quindi sciogliendo i lati omologhi de' primi, e de' secondi triangoli in proporzione, si avrà 1.° $GF:gf=OG:og$, e 2.° $OG:og=OL:ol$, per cui si avrà ancora $Gf:gf=OL:ol$: ma abbiamo dimostrato, che i perimetri de' poligoni simili sono come due lati omologhi, cioè come $GF:gf$; dunque si avrà parimente il perimetro del primo poligono a quello del secondo come $OG:og$, o come $OL:oL$; dal che ne conchiuderemo, che *i perimetri de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono fra loro come i raggi de' cerchi circoscritti, o iscritti.*

Essendo $GF:gf=OG:og=OL:ol$, ne segue che *i lati de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono tra lora come i raggi di cerchi circoscritti, o iscritti.*

207. Abbiamo al di sopra dimostrato, che i triangoli equiangoli sono simili; ma i triangoli rettangoli, che hanno un angolo acuto eguale sono equiangoli (36,5.°); dunque *due triangoli ret-*

tangoli sono simili, allorchè hanno un angolo acuto eguale.

208. Segue, da ciò, che se in un triangolo rettangolo ABC si abbassi dal vertice B dell'angolo retto la perpendicolare BD sull'ipotenusa AC, ne sorgeranno due altri triangoli rettangoli ABD, DBC, i quali avendo rispettivamente gli angoli in A, ed in C acuti di comune al triangolo rettangolo ABC, saranno ad esso equiangoli, e simili; quindi equiangoli, e simili tra loro; dal che ne conchiudiamo, che *se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassi sull'ipotenusa una perpendicolare, il triangolo rettangolo resterà diviso in altri due triangoli rettangoli simili fra loro, e simili all'intiero triangolo primitivo.*

209. Quindi sciogliendo in proporzione i lati omologhi di due triangoli rettangoli simili ABC, ABD; ABC, BDC; ADB, BDC si avrà da' primi due $CA:AB=AB:AD$, dagli altri due $AC:CB=BC:CD$; e degli ultimi due finalmente $AD:DB=DB:DC$; e queste ci mostrano, che *abbassata dall'angolo retto di un triangolo rettangolo la perpendicolare sull'ipotenusa ogni catetto sarà medio proporzionale tra l'intiera ipotenusa, e 'l segmento adjacente, e la perpendicolare sarà media proporzionale tra i due segmenti dell'ipotenusa.*

210. Dunque essendo $AB^2=CA.AD$; e $CB^2=AC.CD$(156), sarà $AB^2:BC^2=AC.AD:AC.CD$, ossia $AB^2:BC^2=AD:DC$. Quindi *nel triangolo rettangolo i quadrati de' catetti sono tra di loro come i segmenti ad essi adjacenti tagliati dalla perpendicolare, che si abbassa sull'ipotenusa dal vertice dell'angolo retto.*

211. Poicchè l'angolo iscritto nella semicirconferenza circolare è retto (118), ne segue, *che ogni perpendicolare abbassata da un punto* B *qualunque della semicirconferenza sul diametro è media proporzionale tra' segmenti di esso, e che le corde* AB, BC, *che dal punto* B *si menano agli estremi del diametro sono medie proporzionali tra l'intiero diametro; ed i segmenti* AD, DC *rispettivamente*. Fig. 58

212. Dunqu'essendo AB^2 eguale al rettangolo di CA in AD, e BC^2 eguale al rettangolo di AC in CD (74, prec), sarà $AB^2 : BC^2 = AD : DC$ (181); cioè *i quadrati de' lati di un triangolo rettangolo sono tra loro come i segmenti adjacenti, che taglia sull' ipotenusa la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto*.

213. Quindi se *tra due rette* M, *ed* N *si domanda ritrovare la media proporzionale*; egli è chiaro, che se nel semicerchio ABC fosse $AD=M$, e $DC=N$, sarebbe DB la media proporzionale richiesta. Dunque se da una retta AL indefinita verso L si tagli $AD=N$, e $DC=M$; e di poi, elevata dal punto D una perpendicolare DO ad AC, si descriva su di AC un semicerchio ABC, che taglia la perpendicolare DO nel punto B, sarà DB la media proporzionale richiesta. Infatti DB è media proporzionale tra AD, e DC; ossia tra M, ed N.

214. Sciogliamo qualche altro problema, che dipende da questi stessi principj.

Si domanda *costruire un rettangolo eguale ad un dato quadrato, il cui lato è* P, *in modo però che i due lati del rettangolo facciano una somma tale, che la sua metà non sia minore di* P.

Supponiamo che AC sia la data somma; allora descritto su di AC un semicerchio ABC, tutto si riduce a determinare nella semicirconferenza ABC un punto B; talchè la perpendicolare BD, che si abbassa da questo punto su di AC sia eguale a P: supponiamo ritrovato questo punto, e sia B, sarà $BD=P$, cosicchè compito colle rette BD, DA il rettangolo DF, sarà ancora $AF=BD=P$. Dunque all' opposto, se dal punto A eleviamo una perpendicolare, da cui ne tagliamo una parte $AF=P$, e da F meniamo una parallela FB' ad AC, i punti B, B', ove questa taglierà la semicirconferenza, soddisferanno alle condizioni del problema; infatti, abbassate da questi punti le perpendicolari BD, $B'D'$, saranno queste eguali ad AF, e quindi a P, e poicchè queste sono rispettivamente medie proporzionali tra AD, DC; AD', $D'C$, sarà $DB^2=AD.DC$, e $D'B'^2=AD'.D'C$, ossia $P^2=AD.DC=AD'.D'C$, e quindi AD, DC, o AD', $D'C$, che fanno la data somma AC saranno i lati del rettangolo richiesto.

Allorchè P è eguale alla metà di AC, ossia al raggio del cerchio, la FB' riuscirà tangente, ed il solo punto di contatto soddisferà alle condizioni del problema: quando poi P è maggiore della metà di AC, la FB' non incontrerà la semicirconferenza, e 'l problema sarà impossibile: è questa la ragione, per cui nell' enunciazione del problema vi abbiamo soggiunta la condizione di non dover essere la metà di AC minore di P.

215. *Dato un quadrato* AC, *e data una ragione* M : N; *si domanda costruire un altro quadrato, che sia al quadrato dato nella data ragione.* Fig. 59

Egli è chiaro, che se M, ed N fossero eguali rispet: a' segmenti HK, KG, che dall'ipotenusa HG vi taglia la perpendicolare menata dal vertice F dall'angolo retto su di HG, si avrebbe $HF^2 : FG^2 = HK : KG = M : N$ (212.); allora, se Fp fosse il lato del quadrato, che si domanda, poicchè; menata po parallela ad HG, si avrebbe $FH^2 : FG^2 = Fo^2 : Fp^2$ (190), ossia $M : N = Fo^2 : Fp^2$, dovendo essere ancora per l'ipotesi stabilita nel problema $M : N = AD^2 : Fp^2$, nè verrà in conseguenza $Fo^2 : Fp^2 = AD^2 : Fp^2$; e quindi sarà $Fo = AD$: dunque se all'opposto su di una retta HL indefinita verso L, si tagli $HK = M$, e $KG = N$; descritto su di HG un semicerchio HFG, e menata dal punto F, ove la semicirconferenza incontra la perpendicolare KF elevata da K, le rette FG, FH; se su di FH si tagli $Fo = AD$, e dal punto o si meni op parallela ad HG, la retta Fp sarà il lato del quadrato in quistione: infatti dietro questa costruzione $Fo^2 : Fp^2 = FH^2 : FG^2$; ma si ha $FH^2 : FG^2 = HK : KG = M : N$; dunque sarà parimente $Fo^2 : Fp^2$, ossia $AD^2 : Fp^2 = M : N$.

216. Si trovi tra M, ed N la media proporzionale A (213.); sarà $M \times N = A^2$ (155, 188): dunque se si vuole un quadrato equivalente ad un dato rettangolo, o a qualunque parallelogrammo, basterà ritrovare fra la base, e l' altezza di esso una media proporzionale; sarà questo il lato del quadrato richiesto,

217. Se da un punto C meniamo varie rette CD, CF, CG, CE, le quali siano segate da due rette parallele DE, AB, i triangoli CFD, CGF Fig. 60 CEG, saranno rispettivamente equiangoli, e quindi simili a' triangoli CfA, Cgf, CBg; allora si avrà $CF : FD = Cf : fA$ (203), e permutando CF:

$Cf{=}FD : fA$; similmente de' due triangoli CFG Cfg si avrà $CF : Cf{=}FG : fg$; ma ancora si è osservato essere $CF : Cf{=}FD : fA$; dunque sarà $DF : Af{=}FG : fg$; ed alternando $DF : FG = Af : fg$; e dimostrando in simil modo, ch' è $FG : GE{=}fg : gB$, ne conchiuderemo, che *le rette parallele, le quali tagliano più rette che partono da un punto, sono da queste tagliate in parti proporzionali.*

218. Sviluppate alcune verità che abbiamo fatto dipendere dalla simiglianza de' triangoli equiangoli, torniamo ad occuparci degli altri caratteri, per conoscere la simiglianza de' triangoli. Siano dunque due triangoli DCE, acb, ed abbiano due lati DC, CE proporzionali a due lati ac, cb, e l' angolo compreso da' primi DCE, eguale all'angolo acb compreso dagli altri; allora tagliata $CA{=}ca$, a $CB{=}cb$ e congiunta AB saranno eguali i due triangoli ACB acb che sotto lati rispettivamente eguali AC, CB; ac, cb vi comprendono angoli eguali, e poicchè per supposizione è $DC : CE{=}ac : cb$, sarà ancora $DC : CE{=}AC : CB$, ossia permutando e dividendo (157, 159) si avrà $DA : AC{=}EB : BC$, e quindi sarà AB parallela a DE (191), e 'l triangolo ACB sarà equiangolo, e quindi simile al triangolo DCE; ma è ancora il triangolo ACB equiangolo all' altro acb; dunque sarà parimente il triangolo acb equiangolo, e quindi simile al triangolo DCE, dal che ne conchiuderemo, che *i triangoli, i quali hanno un angolo eguale ad un angolo, ed i lati intorno gli angoli eguali proporzionali, sono simili.*

Fig. 60

219. Dippiù se i lati ab, ac, bc del triangolo abc sono rispettivamente perpendicolari a' lati AB AC, BC del triangolo ABC, prolungati essi

Fig. 61

fino all' incontro di queste rette rispettivamente, ne sorgeranno i quadrilateri *Aoam*, *Cncm*, *Bobn*. Allora essendo eguali a quattro retti tutti gli angoli interni del quadrilatero *Aoam* (99), poicchè gli angoli *Ama*, *Aoa* sono retti per supposizione, sarà la somma degli angoli in *A*, ed *oam* eguale a due retti; ma a due retti è parimente eguale la somma degli angoli $mao+mab$; dunque sarà $oAm+oam=oam+mab$; toltone di comune *oam*, resterà l' angolo in $A=cab$. In simil modo poicchè tanto l' angolo *bca*, quanto l' angolo in *C* sono supplementi dello stesso angolo *bcm*, saranno eguali fra loro, ed il triangolo *abc* sarà equiangolo, e quindi simile al triangolo *ABC*; dal che ne conchiuderemo che *sono simili due triangoli allorchè i loro lati sono perpendicolari l' uno all' altro*.

Bisogna osservare, che i lati omologhi di questi triangoli sono propriamente quelli, che sono perpendicolari tra loro.

220. Supponiamo ora, che due triangoli *DCE*, *abc* abbiano i lati proporzionali, cioè che sia $DC : CE=ac : bc$; $CE : ED=bc : ba$, $ED : DC=ba : ac$; e vediamo, s' essi sono ancora simili. A tal effetto a' punti *D*, ed *E* della retta *DE* si facciano gli angoli *EDO*, *DEO* rispettivamente eguali agli angoli *cab*, *cba* del triangolo *abc*; essendo gli angoli *cab*, *cba* minori due retti (36), anche gli altri angoli *EDO*, *DEO* saranno minori di due retti; quindi le rette *DO*, *EO* prolungate s' incontreranno (32); allora ne nascerà un triangolo *DOE*, che sarà equiangolo al triangolo *abc*, e quindi simile: si avrà perciò $OD : DE=ca : ab$; ed $OE : ED=bc : ba$ (203); ma è per supposizione $ca : ab=CD:DE$, e $bc : ba=CE:ED$; dunque sarà

Fig 60

parimente $OD : DE = CD : DE$, ed $OE : ED = CE : ED$, e sarà perciò $OD = CD$, ed $OE = CE$, ed i due triangoli DOE, DCE, come equilateri fra loro, saranno egnali, e quindi equiangoli; ma per costruzione il triangolo DOE è equiangolo al triangolo abc; dunque anche i due triangoli DCE, abc saranno equiangoli, o perciò simili, dal che ne conchiuderemo, che *sono simili i triangoli che hanno i lati proporzionali.*

221. Osserviamo finalmente se sono anche simili due triangoli DCE, abc, allorchè hanno due lati DC, CE proporzionali a due lati ac, cb, e degli angoli non compresi in D, in E; in a e b due eguali in D, ed in a, e due della stessa specie, in E, ed in b. Se questi due angoli della stessa specie sono amendue retti, egli è chiaro allora, ch' essendo ancora l' angolo in D eguale all' angolo in a, i due triangoli ACE, abc saranno equiangoli, e quindi simili: supponiamo perciò che i due angoli in E, ed in c siano ambidue ottusi, o acuti; allora se si dimostra l'angolo $DCE = acb$, questa proposizione rientra in quella del n.°: (218): vediamo dunque s' è possibile, che l' angolo DCE possa esser diseguale dall' altro acb; e sulle prime supponendolo maggiore, al punto C della DC facciamo l'angolo $DCG = acb$; in tal caso saranno equiangoli, e perciò simili i due triangoli DCG abc, che hanno per supposizione l' angolo in D egnale all' angolo in a, e per costruzione l' angolo $DCG = acb$: quindi si avrà $DC : CG = ac : bc$; ma è ancora per ipotesi $ab : bc = DC : CE$; dunque sarà parimente $DC : CG = DC : CE$, e quindi sarà $CG = CE$, (152); e l'angolo $CEG = CGE$;

ma l' angolo in E è della stessa specie dell' angolo in b; dunque sarà ancora l' angolo CGE, della stessa specie dell' angolo in b, o del suo eguale CGD(147); ma questo è un assurdo, giacchè i due angoli CGE, CGD sono conseguenti, e gli angoli conseguenti essendo eguali a due retti non possono essere amendue acuti, o ottusi; dunque è parimente un assurdo che nell' ipotesi presente sia l' angolo DCE maggiore dell' angolo acb; in simil modo potrà dimostrarsi che non è minore; dunque gli sarà eguale; ed allora i due triangoli DCE, acb saranno equiangoli, e quindi simili, dal che ne conchiuderemo, che *sono anche simili due triangoli, allorchè hanno due lati proporzionali a due lati, e degli angoli non compresi da questi lati due eguali, o due della medesima specie.*

222. Passiamo ora ad osservare qual ragione hanno tra di loro i triangoli simili. Siano dunque simili i triangoli DCE, acb, ed i lati DC, CE, DE siano rispettivamente omologhi a' lati ac, cb, ab: si avrà sulle prime, triangolo DCE : triangolo $acb=(DC:ac)(DE:ab)$(183); ma per la simiglianza de' triangoli è $DC : DE=ca : ab$, ossia permutando $DC : ac=DE : ab$; dunque sostituendo nella ragione de' triangoli, si avrà, triangolo DCE : triangolo $acb=DC^2 : ac^2$, o come $DE^2 : ab^2$; e dimostrando similmente, ch' è triangolo DCE : triangolo $acb=CE^2 : cb^2$, ec. ne conchiuderemo, che *i triangoli simili sono tra loro come i quadrati de' lati omologhi.*

223. Applichiamo questi stessi principj a' poligoni qualunque simili. E sulle prime proponiamoci di sciogliere il seguente problema: *dato un poligono* abcdef, *vogliamo su di una data retta* Fig. 17

EF *costruire un poligono simile al dato poligono.*

Supponiamo sciolto il problema, e sia $ABCDEF$ il poligono richiesto; AB, BC, CD, DE, EF siano rispettivamente i lati omologhi agli altri ab, bc, cd, de, ef: allora, menando le rette EA, EB, EC, ea, eb, ec, dovrà essere $EF:FA=ef:fa$, e l' angolo $EFA=efa$(303); quindi il triangolo EFA dovrà esser simile all' altro efa(218), e perciò gli sarà ancora equiangolo, e sarà l' angolo $FAE=fae$; ora nella presente ipotesi che i poligoni debbono essere simili dee essere ancora l'angolo $FAB=fab$(303); sicchè dovrà risultarne parimente l'angolo $EAB=eab$; dippiù per la simiglianza de' due poligoni dee essere FA : $AB=fa$: ab; ma è FA : $AB=(FA : AE)$ $(AE : AB)$(166), ed fa : $ab=(fa:ae)(ae : ab)$, e le ragioni di FA : AE, e di fa : ae sono eguali per la simiglianza de' triangoli FAE, fae; dunque riusciranno parimente eguali le ragioni di EA : AB, e di ea : ab, e perciò anche il triangolo EAB riuscirà simile al triangolo eab, e quindi equiangolo (218), e dimostrando lo stesso per gli altri triangoli EBC, ebc; ECD, ecd, si vede che la supposizione del poligono $ABCDE$ simile all' altro $abcde$ ci ha portati a conchiuderne i triangoli FAE, AEB, BEC, CED, ne' quali si risolverebbe il primo, allorchè dal vertice E di uno de' suoi angoli si menano le rette EA, EB, EC a' vertici degli altri angoli, simili a' triangoli fea, aeb, bec, ced ne' quali si risolve similmente il 2.° poligono. Dunque all' opposto, se costruiscansi i triangoli AEF, ACB, BEC, CED equiangoli e quindi simili a' triangoli aef, aeb, bec, ced, ne' quali si risolve il poligono dato, il poligono $ABCDEF$,

somma di tutti que' triangoli sarà il poligono richiesto. A tal effetto menate le rette ea, eb, ec, a' punti F, ed E della retta data si facciano gli angoli AFE, FEA rispettivamente eguali agli angoli afe, fea del triangolo afe; indi a' punti E, ed A si facciano gli angoli AEB, EAB rispettivamente eguali agli angoli aeb, eab; a' punti E, e B si facciano gli angoli BEC, EBC rispettivamente eguali a bec, ebc; e finalmente a' punti E, e C si facciano gli angoli CED, ECD rispettivamente eguali agli angoli ced, ecd; ne sorgerà da tal costruzione il poligono $ABCDE$, il quale trovandosi sciolto ne' triangoli AEF, AEB, BEC, CED rispettivamente equiangoli, e quindi simili a' triangoli aef, aeb, bec, ced ne' quali si è sciolto il poligono $abcde$, sarà simile a questo, e quindi sarà il poligono richiesto.

224. Dall'analisi di questo problema si è rilevato che la supposizione di due poligoni simili ne porta alla simiglianza de' triangoli, ne' quali essi si sciolgono; questi per conseguenza dovranno essere di un egual numero, e nell' uno e nell' altro: Dunque *i poligoni simili sono composti di un egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno.*

225. Segue da ciò, che se due poligoni $ABCDEF$, $abcdef$ sono simili, poicchè i triangoli ne' quali essi si sciolgono sono simili ancora (223), supponendo che i lati omologhi in essi siano AB, ab; BC, bc, cc. si avrà $T : t = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2$ (222); ma è ancora per la medesima ragione $T' : t' = AE^2 : ae^2$; dunque sarà $T : t = T' : t'$; dippiù per la simiglianza de' triangoli T', t' è $T' : t' = EB^2 : eb^2$; ma per la stessa ra-

gione è ancora T'' : $t''=EB^2 : eb^2$; dunque sarà T' : $t'=T''$: t'' ; in simil modo si dimostrerà ch' è T'' : $t''=T'''$: t'''. Allora essendo eguali le ragioni $T : t$; T' : t' ; T'' : t'' ; T''' : t''' ; ed essendo dippiù queste quantità della stessa specie, sarà $T+T'+T''+T'''$ somma di tutti gli antecedenti a $t+t'+t''+t'''$ somma di tutt' i conseguenti come un antecedente T : t suo conseguente (174) ; ma perchè i triangoli T, t sono simili è $T : t=AF^2 : af^2$; dunque sarà ancora $T+T'+T''+T''' : t+t'+t''+t'''=AF^2 : af^2=AB^2 : ab^2$ ec. ; dalche ne conchiuderemo , che *le superficie de' poligoni simili sono tra loro come i quadrati de' lati omologhi.*

226. Quindi essendo simili i poligoni regolari di uno stesso numero di lati (204), ne segue, *che le superficie de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono fra loro come i quadrati di due lati di essi.*

227. Or abbiamo dimostrato al di sopra , che due lati de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono tra loro come i raggi de' cerchi circoscritti, o iscritti (206) ; dunque *le superficie de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono tra loro come i quadrati de' raggi de' cerchi circoscritti, o iscritti.*

228. Si ritrovi L terza proporzionale in ordine ad AF, af; sarà $AF : L=AF^2 : af^2$, e quindi aja del poligono $ABCDE$: aja del poligono $abcde=AF : L$. Dunque se tre rette sono continuamente proporzionali *il poligono descritto sulla prima sta al poligono simile descritto sulla seconda , come la prima retta sta alla terza.*

Fig. 59 229. Dunque se HFG è un triangolo rettangolo, e dal vertice F dell' angolo retto si abbassi sull'

ipotenusa HG la perpendicolare FK, poichè HK è terza proporzionale in ordine a GH, HF, come lo è GF in ordine HG, GK (209); chiamando P il poligono descritto su di HG, p, p' i poligoni simili descritti rispettivamente su di HF, FG, si avrà $P : p = GH : HK$, e $P : p' = GH : GK$; permutando queste due proporzioni si avrà $P : GH = p : HK$, e $P : GH = p' : GK$, e quindi $p : HK = p' : GK$, e permutando e componendo sarà $p+p' : p' = HG : GK$; ma è ancora $P : p' = HG : GK$; dunque sostituendo si avrà $p+p' : p' = P : p'$, e quindi sarà $P = p+p'$, cioè *il poligono descritto sul lato opposto all' angolo retto è eguale alla somma de' poligoni simili, che si descrivono su de' catetti.*

Essendo simili tutt' i quadrati, ne segue che il quadràto dell' ipotenusa è eguale alla somma de' quadrati de' catetti; quindi il teorema di Pitagora non è che un caso particolare di questo.

230. Applichiamo queste cose alla soluzione di alcuni problemi, che dipendono immediatamente dalle teorie qui sopra stabilite. E sulle prime dati due poligoni simili, i cui lati omologhi siano rispettivamente designati da M, ed N, se si domanda costruire un poligono simile ad essi, ed eguale a la loro somma, non si dee fare, che inclinare tra loro le rette M, ed N ad angolo retto, e congiungerne gli estremi; allora il poligono descritto su questa congiungente simile a' poligoni dati sarà il poligono richiesto il che è chiaro (prec.).

231. Poichè il poligono descritto su di HG è eguale alla somma de' poligoni simili ad esso descritti sù de' catetti HF, FG; ne segue, che il

poligono descritto su di un catetto HF è eguale alla differenza de' poligoni ad esso simili descritti uno sull'ipotenusa HG, e l'altro sull'altro catetto FG.

Quindi se M, ed N disegnano i lati omologhi di due poligoni simili diseguali, si avrà il poligono eguale alla loro differenza, descrivendo su di HG eguale al lato maggiore, che supporremo M, un semicerchio HFG; indi adattando in esso una corda $GF=N$; allora congiunta HF, e descritto su di essa il poligono simile a' due poligoni dati, sarà questo il poligono domandato. Infatti il poligono descritto su di HF è eguale alla differenza de' poligoni ad esso simili descritti su di HG, FG, ossia su di M, ed N (prec.).

232. *Costruire un poligono simile ad un poligono dato, e che stia a questo nella data ragione di M : N.*

Sia A un lato del poligono dato. Se X fosse il lato omologo ad A nel poligono, che si domanda; essendo i poligoni simili come i quadrati de' lati omologhi, avuto riguardo alla condizione del problema, dovrebbe essere $X^2 : A^2 = M : N$, ed invertendo $A^2 : X^2 = N : M$; or se in ordine ad A, ed X vi fosse una terza proporzionale P si avrebbe $A^2 : X^2 = A : P$ (166), ossia $N : M = A : P$, ed $A : X = X : P$, cioè resterà sciolto il problema, se in ordine ad N, M, A si trovi una quarta proporzionale P; ed indi, ritrovata tra A, e P una media proporzionale X, si costruisca su di questa un poligono simile al poligono dato. Infatti essendo $A : X = X : P$; sarà $A^2 : X^2 = A : P$, ma è $A : P = N : M$; dunque sarà $A^2 : X^2 : N : M$, ed invertendo $X^2 : A^2 :$

$M : N$, cioè il poligono simile al dato costruito su di X media proporzionale tra A e P sarà a questo nella data ragione di $M : N$, e sarà perciò il poligono richiesto.

233. *Costruire un poligono simile ad un poligono dato* P, *ed eguale ad un altro poligono dato* R. Supponiamo che Q sia il poligono richiesto, e che ab, bc, cd, de, siano rispettivamente i lati omologhi ad AB, BC, CD, DE: sulle prime dovendo esser simile a P, si avrà $P : Q = AB^2 : ab^2$ (225), ossia ritrovando BE terza proporzionale in ordine ad AB; ab, si avrà $P : Q = AB : BE$, ma Q dee esser anche eguale ad R; si avrà dunque per quest' altra condizione $P : Q = P : R$; quindi sarà $P : R = AB : BE$. Tutto dunque si riduce a ritrovare due rette AB, BE, le quali siano proporzionali a' poligoni dati P, R; allora ritrovata tra queste due rette la media proporzionale ab, non si dee che costruire su di questa il poligono Q simile al poligono P. Or per aver due figure proporzionali a due rette, basterà trasformarle in due rettangoli che siano loro rispettivamente eguali, e che abbiano la medesima base, o altezza: in tal caso essendo questi rettangoli proporzionali alle loro altezza, o basi, a queste saranno parimenti proporzionali i due dati poligoni. Quindi ecco la costruzione, che nasce dall' analisi precedente per risolvere il problema proposto. Si faccia su di AB il rettangolo $S = P$, e su di BF l'altro $T = R$; di poi ritrovata tra AB, BE la media proporzionale ab, si costruisca su di questa il poligono simile al poligono P; sarà ancora il poligono $Q = R$. Infatti si ha $S : T = AB : BE$, ossia $P : R = AB : BE$, ma è ancora $AB : BE = P : Q$ (166);

Fig 63

dunque sarà $P : R = P : Q$, e quindi Q sarà simile a P, ed eguale ad R.

234. Costruire un poligono nnesimo di un poligono dato P, e simile ad esso. Se Q fosse il poligono richiesto, si avrebbe in prima $P : Q = n : 1$; ossia, supponendo che BO sia la parte *nnesima* di BA, $P : Q = AB : BO$: ma per la simiglianza de' poligoni dee essere $P : Q = AB^2 : ab^2$; dunque sarà $AB : BO = AB^2 : ab^2$; cioè il lato ab del poligono richiesto, omologo ad AB risulta da quest' analisi medio proporzionale tra AB, e BO: dunque se prenderemo la BO parte *nnesima* di AB, e tra AB, e BO vi ritroveremo la media proporzionale, il poligono descritto su di questa simile al poligono P sarà il poligono richiesto. Infatti si ha dalla costruzione $AB : BO = P : Q$; e quindi Q sarà *nnesima* di P siccome lo è la BO di AB.

Se il poligono Q dee esser *nnecuplo* del poligono P, egli è chiaro, dietro un' analisi simile alla precedente, che il problema resterà sciolto, prendendo una retta DC *nnecupla* della retta AB, e costruendo sulla media proporzionale ab ritrovata tra DC, ed AB un poligono simile a P: infatti da questa costruzione si ha $DC : AB = Q : P$; e quindi sarà Q nnecuplo di P, siccome lo è DC di AB.

Questi problemi, che possiamo riguardare come le conseguenze immediate, alle quali la n.ª analisi ci ha condotta, possono esser bastevoli a risvegliare negli allievi lo spirito d'invenzione. Passiamo ora ad assegnare alcuni caratteri particolari per la simiglianza de' parallelogrammi.

235. Supponiamo primieramente, che i parallelogrammi AE, HK abbiano un angolo $CAB =$ Fig. 51

CHI, e che i lati, che comprendono questi angoli *CA*, *AB*, *CH*, *HI* siano proporzionali: allora saranno anche eguali gli angoli *ABE*, *HIK* come supplementi degli angoli eguali in *A*, ed in *H* respettivamente; e quindi eguali saranno parimente gli angoli *ACE*, *HCK*, e gli altri *BEC*, *IKC*, come opposti ad angoli eguali: dunque i due parallelogrammi *AE*, *HK* saranno equiangoli. Dippiù essendo ancora $CA : AB = CH : HI$, ed essendo *AC*, *HC* rispettivamente eguali a *BE*, *IK*, sarà ancora $BE : AB = IK : HI$, ed invertendo $AB : BE = HI : IK$; ma è $AB = CE$, ed $HI = CK$, sicchè sarà ancora $CE : EB = CK : KI$, ed invertendo $BE : EC = IK : KC$. Avremo dunque

$$CA : AB = CH : HI$$
$$AB : BE = HI : IK$$
$$BE : EC = IK : KC;$$

cioè le grandezze *CA*, *AB*, *BE*, *EC* avranno ragion ordinata alle altre *CH*, *HI*, *IK*, *KC* e sarà perciò $AC : CE = HC : CK$ (168), ed invertendo $CE : CA = CK : CH$; con che avendo dimostrati i parallelogrammi *AE*, *HK* equiangoli, ed i lati intorno gli angoli eguali proporzionali, ne viene ch' essi saranno simili, e perciò *i parallelogrammi, che hanno un angolo eguale ad un angolo, e proporzionali i lati intorno di questi angoli eguali saranno simili.*

236. Quindi, che se paragoniamo i parallelogrammi *DF*, *BH* situati intorno la diagonale *AE* del parallelogrammo *CG* allo stesso parallelogrammo *CG*, si osserverà, che i due triangoli *EDO*, *OBA* sono equiangoli (31,36), e quindi simili allo stesso triangolo *ECA*, per cui si avrà $ED : DO = EC :$

Fig 21

CA, OB : $BA=EC$: CA, e quindi $ED:DO$ $=OB$: BA; dunque saranno simili i parallelogrammi DF, BH, CG che hanno intorno agli angoli eguali i lati proporzionali; e perciò *i parallelogrammi esistenti intorno la diagonale di un altro parallelogrammo, sono simili tra di loro, ed a questo.*

257. Segue da ciò, che se i parallelogrammi CG, DF sono simili, ed hanno un angolo DEF di comune, condotte in essi le diagonali EO, EA dall'angolo comune, sarà per la simiglianza di essi l'angolo $EDO=ECA$, ed ED : $DO=$ $EC:CA$ (203); quindi saranno simili ed equiangoli i due triangoli ACE, ODE (218), e sarà perciò l'angolo $CEA=DEO$, e la diagonale EO del parallelogrammo DF formerà parte della diagonale EA del parallelogrammo CG, dal che ne conchiuderemo, che *i parallelogrammi simili, i quali hanno un angolo di comune, sono intorno la medesima diagonale.*

258. Veniamo ora a considerare le linee proporzionali, che si sviluppano nel cerchio. Riprendiamo la proprietà dimostrata nel cerchio, che ogni perpendicolare EI menata da un punto qualunque della circonferenza sul diametro AB è media proporzionale tra' segmenti di esso: si prolunghi EI finchè incontra dall' altra parte la circonferenza del cerchio nel punto E'; egli è chiaro, che la corda EE' essendo divisa ad angolo retto nel punto I, sarà nello stesso punto bisegata (106); quindi sarà $EI=IE'$ e per conseguenza AI : $IE=IE'$: IB, con che noi osserviamo che le parti eguali della corda EE' sono reciprocamente proporzionali a' segmenti, ch' essa taglia sul diametro. Generalizziamo

Fig. 63

questa idea, e vediamo, se presi quattro punti a piacere H, D, G, F nella circonferenza di un cerchio, ed uniti con delle corde HG, DF, che si tagliano in un punto O, si osserva ne' segmenti HO, OG; DO, OF di queste la stessa proprietà. Si congiunga il punto H col punto D, e'l punto F col punto G: allora i due triangoli HOD, FOG avendo eguali gli angoli HOD, FOG, come verticali, e gli altri HDF FGH, i quali sono misurati dalla metà dello stesso arco HF, saran equiangoli, e quindi simili, e sciogliendo i lati omologhi in proporzione, si avrà $DO : OH = OG : OF$, dal che ne conchiuderemo generalmente che *se due corde in un cerchio si segano, le parti di una saranno reciprocamente proporzionali alle parti dell' altra.*

239. Dunque, se due corde si segano in un cerchio *il rettangolo fatto dalle parti di una è eguale a quello fatto dalle parti dell' altre*(185).

240. Quindi se due rette DF, HG si segano in O, e si ha nel tempo stesso $DO : OG = OH : OF$, descritto un cerchio, che passi per i tre punti H, D, G; se questo potesse passare per un punto F' diverso da F, dovrebbe essere, per ciocchè ora si è dimostrato, $DO : OG = OH : OF'$; ma è per ipotesi $DO : OG = OH : OF$; dunque si avrà $OH : OF' = OH : OF$, e quindi ne risulterebbe $OF = OF'$, il che essendo un assurdo, ne segue, che l' inversa della precedente è anche vera, cioè *se due rette si segano in modo che le parti di una riescano reciprocamente proporzionali alle parti dell' altra, il cerchio, che passerà per tre estremi di queste rette, passerà ancora pel quarto.*

Nello stesso modo può dimostrarsi, che, se una perpendicolare IE ad AB è media propor-

zionale tra' segmenti AI, IB, il cerchio descritto sul diametro AB dovrà passare pe 'l punto E; giacchè se potesse passare per un altro punto E''; allora sarebbe anche IE'' media proporzionale tra AI, IB, e ne vorrebbe $IE''=IE$, il che è un assurdo.

Fig. 64 241. Supponiamo ora, che il punto O d'incontro sia fuori del cerchio, come in O, e vediamo se regge la stessa proprietà delle seganti OA OB menate dal punto O a due punti qualunque A, e B della circonferenza: si tirino le rette AC, BD tra punti A, C; B, D: allora ne sorgeranno due triangoli, i quali perchè hanno l'angolo in O di comune, e l'angolo OAC $=OBD$ come misurati dalla metà dello stesso arco DC, saranno equiangoli, e perciò simili; quindi sciogliendo in proporzione i lati omologhi si avrà $AO:OC=BO:OD$, dal che ne conchiuderemo parimente, che *se due rette che segano il cerchio s' incontrano fuori di esso, le intiere seganti saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne.*

242. Che se una delle seganti OB divenga tangente, come OT, allora, menata da' punti A, e D, ove la segante OA incontra la circonferenza circolare, le rette AT, DT al punto T, si avranno i due triangoli DTO, ATO, i quali, perchè hanno l'angolo in O di comune, e l'angolo OTD è eguale all' altro OAT come fatto nella porzione alterna del cerchio (131), saranno equiangoli e perciò simili; quindi, sciogliendo i lati omologhi in proporzione, si avrà $AO:OT=OT:OD$; cioè *se da un punto fuori del cerchio si meni una tangente, ed una segante al cerchio, la tangente sarà media proporzionale tra la segante intiera, e la sua porzione esterna.*

Quindi *il rettangolo fatto della segante nella sua porzione esterna è eguale al quadrato della tangente menata al cerchio dallo stesso punto, da cui si è condotta la segante* (185).

243. Vediamo ora se l' inversa è anche vera; cioè dal punto O fuori del cerchio si meni una segante OA, ed una retta OT, che incontri la circonferenza del cerchio, e sia $AO : OT = OT = OD$, o ch' è lo stesso, sia $AO \times OD = OT^2$, osserviamo, se OT è tangente: a tal effetto, si meni da O una tangente OF, e trovato il centro Q del cerchio; si menino da Q a' punti T, ed F le rette QT, QF; si congiunga OQ; allora essendo OT per supposizione, ed OF come tangente, media proporzionale tra' AO, ed OD, sarà $OT = OF$, ed i triangoli OTQ, OFQ saranno equilateri fra loro, e quindi saranno eguali; sarà perciò l' angolo $OTQ = OFQ$; ma l'angolo OFQ è retto, perchè fatto dalla tangente, e dal raggio condotto pel punto di contatto (122); dunque sarà retto l'angolo OTQ, che fa la retta OT col raggio menato dal punto, ov' essa incontra la circonferenza del cerchio; e per conseguenza OT sarà tangente (121); dal che ne segue che *se da un punto fuori del cerchio si meni una segante, ed una retta, che incontra la circonferenza, in modocchè questa sia media proporzionale tra l' intiera segante, e la porzione esterna, una tale retta sarà tangente.*

244. Si descriva con un raggio a piacere un cerchio $AFTB$; ed indi menata da un punto F della circonferenza una tangente, si tagli OF eguale al diametro PP' di un tal cerchio, e pe 'l punto O, e pe 'l centro Q del cerchio si faccia passare una segante OQP, si avrà $PO : OF = OF : OP'$ (242), e dividendo sarà $PO - OF :$

$OF=OF-OP' : OP'$: ossia $OP' : OF=OF-OP' : OP'$, e tagliata $OI=OP'$, sarà $IF=OF-OP'$, ed allora si avrà $OI : OF=IF=OI$, ed invertendo $OF : OI=OI : IF$; or è $OF>OI$; dunque sarà parimente $OI>IF$. Quindi con tal costruzione la retta OF resta divisa in modo, che la parte maggiore OI è media proporzionale tra l'intiera retta OF, e la parte minore IF.

Allorchè una retta si divide in tal modo dicesi divisa in *estrema, e media ragione*. Quindi se si domanda dividere una retta OF in estrema e media ragione, bisogna descrivere sopra un diametro eguale ad OF un cerchio, ed indi menata a questo una tangente, tagliarne OF eguale al diametro del cerchio : allora, menata pe'l punto O e pe'l centro una segante OP, si tagli sulla tangente OF una retta $OI=OP'$; il punto I dividerà la retta OF in estrema, e media ragione (prec.).

245. Si divida il raggio AO di un cerchio in estrema, e media ragione nel punto M, ed adattata nel cerchio la corda $AB=OM$, si unisca il raggio OB, e'l punto M col punto B : allora si avrà $AO : OM=OM=AM$; ma è $OM=AB$; dunque sarà $AO : AB=AB : AM$: quindi i due triangoli OAB, BAM avendo intorno l'angolo in A di comune i lati proporzionali, saranno simili, e, sciogliendo i lati omologhi in proporzione, si avrà $AO : OB=AB : BM$; ma è $AO=OB$; dunque sarà parimente $AB=BM$; ma è ancora $AB=OM$; sicchè sarà anche $OM=BM$; e quindi essendo isoscele sì il triangolo AMB, che l'altro MOB, sarà l'angolo $AMB=MAB$, e l'angolo $MOB=MBO$: or è l'angolo AMB, esterno eguale a' due interni, ed opposti MOB, MBO ; dunque l'angolo AMB, e quindi il suo

Fig. 65

eguale MAB sarà doppio di un solo di essi MOB, ma è l'angolo MAB, ossia $OAB=OBA$, sicchè sarà parimente l'angolo OBA doppio dell' angolo AOB; e 'l triangolo isoscele AOB sarà tale, che ciascheduno degli angoli alla base è doppio dell' angolo al vertice.

Poicchè la base AB di questo triangolo è eguale ad OM, ed OM è la parte maggiore del raggio OA diviso in estrema, e media ragione, ne segue che se vogliamo costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascun angolo alla base doppio dell'angolo al vertice, non dobbiamo, che dividere una retta in estrema, e media ragione; la parte maggiore di questa sarà la base del triangolo richiesto.

246. Quindi essendo tutti gli angoli di un triangolo eguali a due retti, ed essendo dippiù tutti gli angoli di un triangolo isoscele, che ha gli angoli alla base doppj dell' angolo al vertice equivalenti a cinque volte l'angolo al vertice, sarà questo la quinta parte di due retti, e la sua metà sarà perciò la quinta parte di un retto; dunque l'angolo retto è divisibile in cinque parti eguali. Infatti se dentro l'angolo retto AOL si costruiscano i due triangoli isosceli AOB, BON, che abbiano gli angoli alla base doppj dell' angolo al vertice, divisi gli angoli al vertice AOB, BON per metà colle rette OP, OQ essendo tanto l'angolo AOB, quanto l'angolo BON la quinta parte di due retti, ciascheduno degli angoli AOP, POB, BOQ, QON sarà la quinta parte di un retto; ossia sarà la quinta parte dell'angolo AOL, e l'angolo NOL sarà la rimanente quinta parte dell'angolo retto AOL, il quale perciò rimarrà diviso in cinque parti eguali.

247. Se ciascuno degli angoli AOP, POB ec. si divide per metà, l'angolo retto si troverà diviso in 10 parti eguali, e seguitando a ragionar nello stesso modo, potremo dividere l'angolo retto in 20, 40, parti eguali. Or poicchè gli angoli sono misurati dagli archi descritti col loro vertice per centro, e con un raggio a piacere, ne segue, che la divisione dell'angolo retto in un numero di parti eguali ci porta a quella dell'arco, che lo misura in altrettante parti eguali, e quindi alla divisione in parti eguali di tutti gli angoli formati in un punto O, ossia di quattro retti; sicchè l'intiera circonferenza del cerchio DCN verrà parimente ad esser divisa in altrettanti archi eguali DH, HB, BF, FC, CD; allora congiungendo le corde DH, HB, BF, FC, CD, queste saranno tutte eguali, per cui saranno parimenti eguali gli archi $DCFB$, $CFBH$, $FBHD$ ec., come rispettivamente supplementi all'intiera circonferenza degli archi eguali DHB, CDH, DCF ec., dal che ne segue che eguali saranno ancora gli angoli DHB, CDH, FCD ec. sottesi da quegli archi eguali: sicchè si otterrà un poligono regolare $HBFCD$ iscritto nel cerchio (100).

iscritto e circoscritto al cerchio

Da ciocchè abbiamo detto se ne deduce 1.° Che un poligono equilatero è anche equiangolo, ed in conseguenza regolare; 2.° che il problema dell'iscrizione de' poligoni regolari nel cerchio dipende da quello della divisione in parti eguali dell'angolo retto, e che generalmente si può nel cerchio iscrivere un poligono regolare che abbia tanti lati, quante sono le parti eguali, nelle quali possiamo dividere l'angolo retto.

248. Dunque, poicchè l'angolo retto è divisibile in cinque, dieci, venti parti eguali, come si

è veduto, ne segue che nel cerchio si può iscrivere il pentagono, e'l decagono regolare, il poligono regolare di 20 lati ec.

Dippiù ogni angolo è divisibile per metà, e quindi in quattro, otto 16 parti eguali: dunque possiamo ancora nel cerchio iscrivere il quadrato, l'ottagono regolare, il poligono regolare di 16 lati ec.

Abbiamo dippiù veduto al di sopra, che si potea nel cerchio iscrivere un triangolo equilatero; dunque possiamo anche iscriverci l'esagono, il dodecagono regolare, ec.

249. Da ciò possiamo per un raziocinio inverso tirarne, che l'angolo retto è divisibile in tre parti eguali. Infatti preso nel lato AB dell'angolo retto ABH un punto A, si descriva sopra di AB un triangolo equilatero AOB: sarà ciascun angolo di questo eguale ad un terzo di due retti, ossia due terzi di un retto; quindi sarà l'angolo ABO due terzi dell'angolo retto ABH; e l'altro terzo sarà l'angolo OBH; quindi se l'angolo ABO si divida per metà per mezzo della retta BT, l'angolo retto ABH si troverà diviso ne' tre angoli eguali ABT, TBO; OBH. Fig. 4

250. L'arco corrispondente al lato del triangolo equilatero iscritto è la terza parte dell'intera circonferenza, e l'arco corrispondente al lato del pentagono regolare è la quinta parte di essa; dunque la differenza di questi due cerchi sarà $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ della circonferenza, ossia $\frac{5}{15}-\frac{3}{15}=\frac{2}{15}$, e la metà sarà $\frac{1}{15}$ della circonferenza; or noi possiamo iscrivere nel cerchio tanto il triangolo equilatero, quanto il pentagono regolare; dunque si può anche dividere la circonferenza in 15 parti eguali;

e perciò si può ancora nel cerchio iscrivere il quindecagono regolare.

251. Quindi l'angolo retto è anche divisibile in 15 parti eguali. Infatti essendo l'angolo, che vien misurato dall'arco corrispondente al lato del quindecagono $\frac{1}{15}$ di tutti gli angoli misurati dall'intiera circonferenza, ossia $\frac{1}{15}$ di 4 retti, ossia $\frac{4}{15}$ di un retto, se esso si divide in quattro angoli eguali, ciascheduno di questi sarà $\frac{1}{15}$ di un retto.

252. Oltre delle rapportate divisioni, che possono farsi sull'angolo retto, colla geometria elementare è impossibile poterlo dividere in altro numero di parti eguali; quindi non possono nel cerchio iscriversi, che i poligoni regolari di 3, 4, 5, 15 lati, e quelli, che da questi dipendono, come i poligoni regolari di 6, 12, 24, che dipendono da quello di tre lati; di 8, di 16, 32 ec. che dipendono dal quadrato; da 10, 20, 40 ec., che dipendono dal pentagono, di 30, 60; 120 ec., che dipendono dal quindecagono. Non ostante Carlo Federico Gaus nella sua opera stampata a Lipsia nel 1801 sotto titolo *disquisitiones aritmeticae* ha dimostrato, che si può nel cerchio iscrivere colla geometria elementare, ossia per mezzo della resoluzione dell'equazione di 1.°, e 2.° grado, il poligono regolare di 17 lati e generalmente quello di 2^n+1 di lati, quando 2^n+1 è un numero primo.

253. Risolviamo ora i problemi d'iscrivere nel cerchio le figure regolari possibili ad esservi iscritte. E sulle prime iscriviamo nel cerchio il quadrato. Sia *ABCD* il quadrato iscritto, saranno retti gli angoli *BAD*, *ADC*, *DCB*, *CBA*; e quindi i segmenti *ADB*, *ADC*, *DCB*, *CBA* saranno tutti semicerchi, e le rette *AC*, *BD*, che uniscono gli angoli opposti saranno diametri

Fig. 66

del cerchio; dippiù saranno eguali gli archi AB, BC, CD, DA; e quindi saranno parimente eguali gli angoli AOB, BOC, COD, DOA fatti al centro O, perchè misurati da archi eguali; ma tutti gli angoli fatti in un punto sono eguali a quattro retti, sicchè ciascheduno degli angoli AOB, BOC, COD, DOA sarà retto, ed i diametri AC, DB saranno perpendicolari tra di loro. Dunque all' opposto, se nel cerchio $ABCD$ meniamo i due diametri perpendicolari AC, BD, gli estremi di questi segneranno nella circonferenza del cerchio quattro punti A, B, C, D, i quali congiunti colle rette AB, BC, CD, DA, si avrà il quadrato $ABCD$, che sarà il quadrato iscritto nel cerchio. Infatti da questa costruzione la circonferenza del cerchio si ha divisa in quattro archi eguali AB, BC, CD, DA corrispondenti agli angoli eguali AOB, BOC, COD, DoA; quindi le corde AB, BC, CD, DA saranno eguali; sono dippiù retti gli angoli in A, in B, in C, in D, perche iscritti nel semicerchio; dunque il quadrato $ABCD$ sarà l' iscritto nel cerchio.

254. Se ciascuno degli archi eguali AB, BC, CD, DA si biseghi, la circonferenza si troverà divisa in otto archi eguali, e quindi congiungendo i punti di divisione, si avrà l' ottagono regolare, e seguitando nello stesso modo si avrà il poligono regolare iscritto di 16 lati ec.

255. *Dato un cerchio vogliamo iscriverci un decagono regolare.*

Supponiamo sciolto il problema, e sia AB il lato del decagono regolare iscritto; sarà l' arco *Fig.65*

$AB \frac{1}{10}$ della circonferenza, e quindi, menati i

raggi OA, OB agli estremi dell'arco AB, l'angolo AOB misurato dall'arco AB sarà $\frac{1}{10}$ di quattro retti, ossia $\frac{1}{5}$ di due retti, e quindi la somma degli angoli OAB, OBA sarà $\frac{4}{5}$ di due retti; ma gli angoli OAB, OBA sono eguali, come opposti a' lati eguali del triangolo isoscele AOB, dunque ciascheduno di essi sarà $\frac{2}{5}$ di due retti, e sarà perciò doppio dell' angolo in O; cioè il triangolo isoscele AOB sarà tale, che ciaschedun angolo alla base è doppio dell'angolo al vertice, e quindi sarà AB base di un tal triangolo eguale alla parte maggiore del raggio del cerchio diviso in estrema, e media ragione (245); ma AB è il lato del decagono supposto; *dunque s'iscriverà il decagono regolare in un cerchio, adattando nella circonferenza di esso la parte maggiore del suo raggio diviso in estrema, e media ragione.* Infatti da tal costruzione ne risulta, che la parte maggiore del raggio diviso in estrema, e media ragione è base del triangolo isoscele che ha ciascun angolo alla base doppio dell' angolo al vertice, ch'è nel centro: sarà dunque quest' angolo $\frac{1}{5}$ di due retti, ossia $\frac{1}{10}$ di 4 retti, e l' arco BA, che lo misura sarà la decima parte della circonferenza, e quindi la sua corda AB sarà il lato del decagono.

256. Segue da ciò, che se, iscritto nel cerchio un decagono $DIHN \ldots D$, si congiungano a due a due gli archi, che sono sottesi da' lati del decagono per mezzo delle rette DH, HB, BF, FC, CD, la circonferenza del cerchio si troverà divisa in cinque archi eguali, DH, HB, BF, FC, CD; e quindi eguali saranno le corde DH, HB, BF, FC, CD, e 'l poligono $DHBFC$ sarà in conseguenza un pentagono regolare.

Dunque per iscrivere nel cerchio un pentagono; non si dee fare, che iscrivervi prima un decagono, ed indi unire a due gli archi del decagono.

257. Dato un cerchio ABF iscriverci l'esagono regolare.

Fig. 67

Supponiamo, che ED sia il lato dell' esagono; sarà l' arco ED la sesta parte dell' intiera circonferenza, e quindi se uniamo i raggi EO, OD l' angolo EOD misurato dall' arco ED sarà $\frac{1}{6}$ di quattro retti, ossia $\frac{1}{3}$ di due retti; allora gli altri due angoli OED, ODE insieme presi, dovendo esser supplemento dell' angolo in O, saranno due terzi di due retti (36); ma essi sono eguali, perchè opposti a' lati eguali OE, OD, dunque ciascheduno di essi sarà parimente un terzo di due retti; ed il triangolo EOD risulterà equiangolo, e quindi equilatero, con che sarà $ED=EO$, e se ne conchiuderà, che il lato dell' esagono iscritto nel cerchio è eguale al raggio. Dunque *a partire da un punto* A *preso sulla circonferenza del cerchio* ADE *se si adatta sei volte il raggio intorno alla circonferenza, il poligono che ne risulterà* ABCDEF *sarà l' esagono regolare iscritto nel cerchio.*

258. Adattiamo nel cerchio DBC il lato FG del triangolo equilatero, e 'l lato FC del pentagono ambidue iscrittibili in esso; sarà l' arco $FG=\frac{1}{3}$ della circonferenza, ed $FC=\frac{1}{5}$ della stessa circonferenza; quindi si avrà arco $CG=$ arco $FG-$ arco $FC=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ della circonferenza, e per conseguenza diviso l' arco CG per metà in i, sarà l' arco Ci $\frac{1}{15}$ della circonferenza, e la corda che sottende quest' arco sarà il lato del quindecagono regolare iscritto nel cerchio. Dunque *s' i-*

Fig. 65

scriverà nel cerchio il quindecagono regolare, adattando prima nella sua circonferenza il lato del triangolo equilatero, e'l lato del pentagono a partire da uno stesso punto; allora divisa per metà la differenza degli archi, che sono sottesi da questi lati, si adatterà in uno di questi archi metà della data differenza una corda, che si porterà intorno la circonferenza, finchè si ritornerà dal punto stesso, da cui si sarà cominciato.

259. S'iscriva nel cerchio $ABDE$ un poligono regolare possibile ad esser iscritto, ed abbassate dal centro O su' lati di esso le perpendicolari OH, OM, ON ec., si menino da' punti H', M', N' ec., ove queste incontrano la circonferenza, le tangenti $E'D'$, $D'C'$, $C'B'$, $B'A'$, $A'F'$, $F'E'$: egli è chiaro, che congiunti gli estremi F', D' di due tangenti contigue $E'F'$, $E'D'$ con una retta $F'D'$, poichè ne' triangoli $pH'D'$, $qT'F'$ sono retti gli angoli $pH'D'$, $qT'F'$, saranno acuti gli altri due $H'D'F'$, $T'F'D'$, e quindi essendo la loro somma minore di due retti, le due tangenti dovranno convenire; similmente si dimostrerà, che convengono tutte le altre tangenti, per cui si avrà un poligono circoscritto al cerchio (129): allora dal centro O a' punti A', B', C', D', E', F' ove s'incontrano a due a due le tangenti si menino le rette OA', OB', OC', OD', OE', OF': ciò posto poichè sono eguali le due tangenti $E'H'$, $E'T'$ menate al cerchio dallo stesso punto E'; essendo parimente $OH'=OT'$, perchè raggi, e l'angolo $OH'E'=OT'E'$ come retti, saranno eguali i due triangoli rettangoli $OH'E'$, $OT'E'$, e sarà perciò l'angolo $H'OE'=T'OE'$, per cui sarà ancora l'arco

Fig.67

$H'E=T'E$, e la retta OE' passerà per la metà dell'arco $T'H'$: or, condotta la OE, poicchè è l'angolo $OEH=OET$ (101), $ET=EH$ (106), ed EO di comune, sarà il triangolo TOE eguale all' altro EOH (46), e l'angolo $TOE=EOH$; sicchè anche la retta OE passerà per la metà dell' arco $T'H'$; ed i punti O, E, E' saranno per diritto; lo stesso si dimostrerà per gli altri punti O, D, D', O, C, C' ec. Ciò posto esssendo retti si gli angoli in H per costruzione, che gli angoli in H' perchè fatti dalla tangente, e dal raggio menato dal punto del contatto, sarà ED parallela ad $E'D'$; similmenta si dimostreranno gli altri lati del poligono iscritto paralleli a' corrispondenti lati del poligono circoscritto; allorà sarà l'angolo OEH eguale al suo interno, ed opposto $OE'H'$, l'angolo OET eguale all'angolo $OE'T'$, per cui sarà tutto l'angolo $FED=F'E'D'$; in simil modo si dimostrerà, che gli altri angoli del poligono iscritto sono eguali agli angoli del poligono circoscritto; dunque i due poligoni sono equiangoli. Dippiù è $ED':ED=OD':OD$, e similmente $D'C':DC=OD':OD$ (203); quindi sarà $E'D':ED=D'C':DC$ (155); e permutando $E'D':D'C'=ED:DC$, e dimostrando in simil modo proporzionali gli altri lati de' due poligoni intorno gli angoli eguali, ne conchiuderemo che il poligono circoscritto $A'B'C'D'E'F'$ è simile al poligono iscritto $ABCDEF$, e quindi, come questo, avrà i lati eguali, e gli angoli eguali; e perciò sarà regolare. Dunque *per circoscrivere ad un cerchio un poligono regolare di un certo numero di lati, non si deve che iscrivervi prima il poligono regolare dello stesso numero di lati, ed abbassate dal centro su lati del poligono iscritto le*

perpendicolari; menare da' punti, ove queste incontrano la circonferenza, le tangenti, le quali si prolungheranno finchè s' incontrano: il poligono, che ne risulterà dall' incontro delle tangenti sarà il poligono richiesto.

Dunque nel cerchio non si possono circoscrivere, che quei poligoni regolari, i quali si sanno iscrivere.

260. Poichè sta $OH : OH' = ED : E'D'$: *il lato del poligono circoscritto simile all' iscritto sarà una quarta proporzionale in ordine all' apotema del poligono iscritto, al raggio del cerchio, ed al lato dello stesso poligono iscritto.*

261. Da quanto abbiamo detto sulla iscrizione, e circoscrizione de' cerchi intorno a' poligoni, e di questi intorno a quelli, potremo conchiudere, che a due si riducono tutt' i problemi di questa natura. Il primo è: *Dato un poligono regolare si domanda circoscrivergli, ed iscrivere in esso un cerchio*; il secondo; *Dato un cerchio, si vuole circoscrivergli, ed iscrivere in esso un poligono regolare.* Il primo problema è capace colla geometria elementare di una soluzione generale, come abbiamo osservato al di sopra; ma abbiamo già osservato che la soluzione del secondo problema riguarda casi particolari.

262. Risolviamo ora alcuni problemi, che riguardano la teoria, di cui ci stiamo occupando. E sulle prime *dato il lato* BD *di un poligono iscritto nel cerchio* BEF, *e dato il raggio di questo cerchio, vogliamo ritrovare l' apotema del poligono.* Fig. 59

Sia OI un tal apotema; dovrà esso essere perpendicolare a BD (103); quindi BD resterà

divisa da OI per metà nel punto I (106), e poicchè è data la corda BD, sarà data anche la sua metà BI; è dippiù dato il raggio OB; dunque nel triangolo rettangolo OBI, in cui è data l' ipotenusa OB, ed un catetto BI, sarà dato l' altro catetto OI (76, 77), ch' è l' apotema cercato,

263. *Dato il raggio di un cerchio, e'l lato del poligono iscritto, si domanda ritrovare il lato del poligono regolare di doppio numero di lati.*

Se BD è l'arco corrispondente al lato del poligono iscritto, il lato del poligono di un doppio numero di lati sarà BC corda della metà dell' arco BD: allora, ritrovato l'apotema OI (prec.), si prolunghi finchè incontra la circonferenza in C; il punto C dividerà per metà l' arco BD: e poicchè è dato OC, ed OI è noto, sarà nota CI di loro differenza; è dippiù dato BI metà della corda BD, quindi nel triangolo rettangolo BIC, in cui sono noti i due catetti BI, IC, sarà nota l' ipotenusa BC, ch' è il lato domandato.

264. Iscriviamo nel cerchio un poligono regolare possibile ad essere iscritto, e circoscriviamogli un poligono simile; indi si dividono per metà gli archi corrispondenti a' lati di esso, e si continuino a dividere per metà gli archetti risultanti, finch' essi divengono così piccoli da confondersi quasi colle loro corde; allora i poligoni iscritti, e circoscritti andranno sempre avvicinandosi alla circonferenza circolare, e portata innanzi questa operazione, finchè la differenza del raggio, e dell' apotema, ossia del poligono circoscritto ed iscritto sia minore di qualunque grandezza assegnabile, il cerchio diverrà allora il limite di questi poli-

goni, i quali per conseguenza differiranno tra loro, e dalla circonferenza circolare per una grandezza non assegnabile, ed avranno per conseguenza tra di loro e col cerchio una medesima ragione (146).

È questo il metodo di esaustione garantito da tutta l' antichità. Archimede ne fu l' inventore, ed ei lo diresse a tante belle, ed utili scoverte.

265. S' intendano iscritti ne' cerchi $AGFE$, $agfe$ due poligoni regolari simili di un gran numero di lati, e si chiamino P, p i perimetri rispettivi de' poligoni $AGFE$, $agfe$, e C, c le respettive circonferenze, ove questi poligoni si trovano iscritti, si avrà perimetro P : perimetro $p = OG : og$ (206); ma essendo C, e c i limiti rispettivi di P, e p, è ancora circonferenza C circonferenza c=perimetro P: perimetro p; dunque sarà parimente $C : c = OG : og$: cioè *le circonferenze de' cerchi sono tra loro come i loro raggi.*

266. Di più restando la medesima costruzione, e chiamando P, p i poligoni $AGFE$, $agfe$, e C, c i cerchi, ne' quali sono iscritti questi poligoni, si avrà aja del poligono P : aja del poligono $p = OG^2 : og^2$ (225): ma è ancora aja del poligono P : aja del poligono p = cerchio C : cerchio c; sicchè si avrà parimente cerchio C : cerchio $c = OG^2 : og^2$, cioè *i cerchi sono tra di loro come i quadrati de' loro raggi.*

267. Quindi se si domanda un cerchio, che sia nnesimo, o nnecuplo di un cerchio dato, il cui Fig. 68 raggio è A, basta prendere una retta C, che sia nnesima, o nnecupla di A (196); allora ritrovata tra A, e C la media proporzionale B, sarà questa retta il raggio del cerchio nnesimo, o

nnecuplo di A. Infatti si ha $C : A :: C^2 : B^2$; e quindi il cerchio che ha per raggio C a quello che ha per raggio B come $C : A$; dunque, secondochè C è nnesima, o nnecupla di A, sarà il cerchio del raggio C nnesimo, o nnecuplo del cerchio dato, che ha per raggio A.

268. Similmente se si domanda un cerchio, che sia eguale alla somma di due cerchi dati, i cui raggi sono B, e C, non si dee fare, che disporre ad angolo retto le due rette B, C, come FDE; allora congiunta FE, sarà questa congiungente il raggio del cerchio domandato. In fatti si ha cerchio di FE : cerchio di $FD+$ cerchio di $DE = FE^2 : FD^2 + DE^2$ (266); ma è $FE^2 = FD^2 + DE^2$; dunque sarà ancora il cerchio descritto col raggio FE eguale alla somma de' cerchi descritti co' raggi FD, DE, ossia B, e C.

269. Che se dati due cerchi diseguali, i cui raggi sono A, B, se ne voglia un altro eguale alla loro differenza, si descriva su di una retta $FE = A$ un semicerchio FDE, ed adattatavi dal punto F una corda FD eguale a B, si unisca il punto D col punto E: sarà la DE il raggio del cerchio in quistione: in fatti si ha cerchio di DE : cerchio di $FE-$ cerchio di $FD = DE^2 : FE^2 - FD^2$ (266); ma è $DE^2 = FE^2 - FD^2$; dunque sarà parimente il cerchio descritto col raggio DE eguale alla differenza de' cerchi descritti co' raggi FE, ED, ossia A, e B.

270. Avendo dimostrato che il cerchio descritto sull'ipotenusa FE di un triangolo rettangolo FDE è eguale alla somma de' due cerchi descritti su de' catetti FD, DE dello stesso triangolo rettangolo, sarà anche il semicerchio $FDE = FPD + DQE$; toltivi di comune i segmenti FDG,

DEK, rimarrà il triangolo rettangolo FDE eguale alla somma delle aje curvilinee $FGDP$, $DKEQ$ (a).

Fig. 67. 271. Consideriamo iscritto nel cerchio $FREA$ un poligono regolare di un numero grande di lati, finchè il poligono differisca dal cerchio per una quantità inassegnabile (254); sarà in tal caso l'aja circolare eguale a quella del poligono con una approssimazione che differisce dal vero per una quantità inassegnabile (264); ma questa si ha moltiplicando il suo perimetro per la metà del suo apotema OR (105); che dietro la $n.^a$ supposizione diviene eguale al raggio OR'; dunque *l'aja del cerchio sarà eguale approssimativamente ad un rettangolo, che ha per base la sua circonferenza, e per altezza la metà del suo raggio.*

272. Dunque se tra la circonferenza circolare, e 'l raggio si ritrovi una media proporzionale, il quadrato di questa sarà eguale all'aja del cerchio; e questo è ciocchè dicesi *quadrare il cerchio*. Ma una tale operazione richiede, che la circonferenza circolare si valuti in parti del suo raggio: quindi fa d'uopo conoscere prima il rapporto della circonferenza al suo raggio, o al diametro. Or questo rapporto non si è potuto determinare, che per approssimazione, quantunque questa sia stata spinta tant'oltre, che la cognizione del rapporto vero non recarebbe alcun vantaggio al di sopra del rapporto di approssimazione. Sicchè e l'impossibilità di avere un rapporto esatto della

(a) Queste aje curvilinee vengono conosciute sotto il nome di *lunule* d'Ippocrate, perchè Ippocrate di Chio dimostrò il primo la somma di questi spazj curvilinei eguale al aja di quel triangolo rettangolo.

circonferenza al diametro, e 'l quasi nulla di vantaggio, che avrebbe il rappòrto vero sull' approssimativo rende di niun momento la ricerca della quadratura del cerchio; la quale, se ha meritata qualche sguardo da que' geometri, che non conoscevano, come noi, i metodi di approssimazione (a), sarebbe degno di pietà piuttostocchè di ammirazione chi a' nostri tempi se ne occupasse, essendo divenuto ormai un tal problema l' occupazione esclusiva di quelle persone, che conoscono appena le prime nozioni di geometria. Intanto noi con un metodo di approssimazione andremo ad indicare il modo come ritrovare il rapporto del diametro alla circonferenza.

273. S' iscriva in un cerchio *ACHF* un esagono regolare, il cui lato, com' è noto, è eguale al raggio; indi si ponga il raggio eguale ad 1, ossia ad 1000000, facendo il calcolo con sei cifre decimali: l' apotema *OR* sarà eguale (262) a Fig. 67

$$\sqrt{\left[OA^2-\frac{AB^2}{4}\right]}=\sqrt{\left[(1000000)^2-\left(\frac{1000000}{4}\right)^2\right]},$$

radice, la quale si ottiene per approssimazione.

(a) Gli antichi geometri prima di Archimede si occupavano molto di questo problema: essi però ignoravano i metodi di approssimaione, che Archimede cominciò ad usare. Così Ippocrate da Chio dalla quadratura delle lunule, che abbiamo osservata, (270), aveva concepita la speranza di poter ritrovare l' esatta quadratura del cerchio; ma il suo inganno fu, al dir di Montucla, *un certain raisonnement, dont le vice consiste en ce quel' il prenoit comme absolument quarrables des lunulles d'une espèce differente de celles, qu'il avoit quarrées.* Il sofisma era quello, che i *Logici* chiamano *argomentare dal particolare all' universale*: se sono quadrabili le lunule corrispondenti a' cateti di un triangolo rettangolo iscritto in un cerchio, lo saranno generalmente le lunule corrispondenti a' lati di un triangolo qualunque iscritto nel cerchio? La quistione riguardata sotto questo punto di veduta non è più quella d' Ippocrate da Chio.

Indi si ritrovi AR lato del dodecagono regolare, ed esso sarà (263)

$$\sqrt{\left[\frac{AB^2}{4}+(OR'-OR)^2\right]}=$$

$$\sqrt{\left[\frac{(1000000)^2}{4}\left(+(1000000-\sqrt{[(1000000)^2-(\frac{1000000}{4})]}\right)^2\right]}$$

Si ritrovino nello stesso modo i lati de' poligoni regolari di 24 lati, di 48, di 96, di 192 di 384, di 768 ec., ed allorchè ci saremo arrestati ad un poligono di un numero grande di lati, si ritrovi il lato del poligono circoscritto corrispondente. Ciò fatto si moltiplichino i numeri ritrovati esprimenti i lati del poligono iscritto, e circoscritto pe'l numero de' lati, che essi hanno, e si avranno due numeri, il primo de' quali esprimerà la lunghezza in parti di raggio dell' intiero perimetro del poligono iscritto, e l' altro esprimerà il perimetro del poligono circoscritto. Or la circonferenza è il limite di questi perimetri da'quali differisce per una grandezza minore di qualunque assegnabile; dunque se prenderemo la metà del perimetro del poligono circoscritto, ch'è maggiore della circonferenza di una quantità picciolissima, e l' uniremo alla metà del perimetro del poligono iscritto, che manca dalla circonferenza per la stessa piccolissima quantità, la somma ci darà con una grande approssimazione al vero la circonferenza del cerchio in parti di raggio (*a*).

(*a*) Se un numero n è il limite di due altri numeri, che differiscono da esso per la stessa quantità, p. e. per 1, si avrà $n+1$ pe'l numero maggiore, ed $n-1$ pe 'l minore; quindi prendendo la metà

Archimede per determinare un tal rapporto approssimativo al vero della circonferenza del cerchio al suo diametro iscrisse, e circoscrisse nel cerchio un poligono regolare di 96 lati, partendo dall' esagono, il cui lato, come si sa, è eguale al raggio. Egli ritrovò ciò facendo, cha il perimetro del poligono iscritto è eguale a $3\frac{10}{71}$, e quello del circoscritto a $3\frac{10}{70}$, cosicchè la prima espressione è la circonferenza del cerchio approssimativamente un po meno del vero, e la seconda esprime la circonferenza approssimativamente un poco più del vero. Egli scelse la seconda espressione, ossia $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$, cosicchè, secondo lui, si ha $7 : 22 =$ un diametro qualunque alla sua circonferenza. Altri calcoli

---

di questi due numeri, si avrà $\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=n$; con che il limite n si ottiene prendendo la metà della quantità maggiore, ed unendola alla metà della quantità minore. Or poichè il poligono circoscritto di un numero grande di lati supera la circonferenza di una quantità inassegnabile, e di una quantità parimente inassegnabile manca dalla circonferenza il perimetro del poligono iscritto, la circonferenza sarà il limite de' perimetri di questi due poligoni; e la differenza di questi perimetri dalla circonferenza, essendo sempre una grandezza non assegnabile, potremo dire, che il perimetro del poligono circoscritto di tanto supera la circonferenza di quanto manca dalla stessa il perimetro del poligono; iscritto; quindi chiamando C la circonferenza, ed $\frac{1}{\infty}$ la quantità, di cui essa manca dal perimetro del poligono circoscritto, ed in cui eccede per conseguenza il perimetro del poligono iscritto, si avrà C limite di $C+\frac{1}{\infty}$, e di $C-\frac{1}{\infty}$, e quindi sarà $C=\frac{C+\frac{1}{\infty}}{2}+\frac{C-\frac{1}{\infty}}{2}$, ossia la circonferenza sarà eguale alla metà del perimetro del poligono circoscritto più la metà del perimetro del poligono iscritto.

Indi si ritrovi AR lato del dodecagono regolare, ed esso sarà (263)

$$\sqrt{\left[\frac{AB^2}{4}+(OR'-OR)^2\right]}=$$

$$\sqrt{\left[\frac{(1000000)^2}{4}\left(+(1000000-\sqrt{[(1000000)^2-(\frac{1000000}{4})]}\right)^2\right]},$$

Si ritrovino nello stesso modo i lati de' poligoni regolari di 24 lati, di 48, di 96, di 192 di 384, di 768 ec., ed allorchè ci saremo arrestati ad un poligono di un numero grande di lati, si ritrovi il lato del poligono circoscritto corrispondente. Ciò fatto si moltiplichino i numeri ritrovati esprimenti i lati del poligono iscritto, e circoscritto pe 'l numero de' lati, che essi hanno, e si avranno due numeri, il primo de' quali esprimerà la lunghezza in parti di raggio dell' intiero perimetro del poligono iscritto, e l' altro esprimerà il perimetro del poligono circoscritto. Or la circonferenza è il limite di questi perimetri da' quali differisce per una grandezza minore di qualunque assegnabile; dunque se prenderemo la metà del perimetro del poligono circoscritto, ch' è maggiore della circonferenza di una quantità picciolissima, e l' uniremo alla metà del perimetro del poligono iscritto, che manca dalla circonferenza per la stessa piccolissima quantità, la somma ci darà con una grande approssimazione al vero la circonferenza del cerchio in parti di raggio (*a*).

(*a*) Se un numero n è il limite di due altri numeri, che differiscono da esso per la stessa quantità, p. e. per 1, si avrà $n+1$ pe'l numero maggiore, ed $n-1$ pe 'l minore; quindi prendendo la metà

Archimede per determinare un tal rapporto approssimativo al vero della circonferenza del cerchio al suo diametro iscrisse, e circoscrisse nel cerchio un poligono regolare di 96 lati, partendo dall' esagono, il cui lato, come si sa, è eguale al raggio. Egli ritrovò ciò facendo, cha il perimetro del poligono iscritto è eguale a $3\frac{10}{71}$, e quello del circoscritto a $3\frac{10}{70}$, cosicchè la prima espressione è la circonferenza del cerchio approssimativamente un po meno del vero, e la seconda esprime la circonferenza approssimativamente un poco più del vero. Egli scelse la seconda espressione, ossia $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$, cosicchè, secondo lui, si ha $7 : 22 =$ un diametro qualunque alla sua circonferenza. Altri calcoli

di questi due numeri, si avrà $\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=n$; con che il limite n si ottiene prendendo la metà della quantità maggiore, ed unendola alla metà della quantita minore. Or poicchè il poligono circoscritto di un numero grande di lati supera la circonferenza di una quantità inassegnabile, e di una quantità parimente inassegnabile manca dalla circonferenza il perimetro del poligono iscritto, la circonferenza sarà il limite de' perimetri di questi due poligoni; e la differenza di questi perimetri dalla circonferenza, essendo sempre una grandezza non assegnabile, potremo dire, che il perimetro del poligono circoscritto di tanto supera la circonferenza di quanto manca dalla stessa il perimetro del poligono; iscritto; quindi chiamando C la circonferenza, ed $\frac{1}{\infty}$ la quantità, di cui essa manca dal perimetro del poligono circoscritto, ed in cui eccede per conseguenza il perimetro del poligono iscritto, si avrà C limite di $C+\frac{1}{\infty}$, e di $C-\frac{1}{\infty}$, e quindi sarà $C=\frac{C+\frac{1}{\infty}}{2}+\frac{C-\frac{1}{\infty}}{2}$, ossia la circonferenza sarà eguale alla metà del perimetro del poligono circoscritto più la metà del perimetro del poligono iscritto.

inseguito hanno vieppiù approssimato un tal rapporto. Più di tutti gli altri è noto quello di Mezio, ch'è $\frac{355}{113}$, cosicchè, secondo Mezio, il diametro sta alla circonferenza come $113 : 355$.

Questo rapporto trovato da Mezio sviluppato in decimali si è semprepiù approssimato al vero. Alcuni l'hanno portato fino alla centocinquantesima cifra decimale; altri fino alla centoventisettesima, ed altri fino alla quindicesima: questo è 3. 141 592 653 897 932. Ma ne' calcoli, ne' quali non vi è bisogno di molta precisione si fa uso o del rapporto archimedeo, o di quello di Mezio a due cifre decimali, cioè di 3. 14.

Questo rapporto costante dalla circonferenza al diametro s' indica da' geometrici col simbolo π; dunque secondo archimede si ha $\pi = \frac{22}{7}$, e secondo Mezio $\pi = 3.14$.

Quindi essendo $\frac{22}{7} = \frac{\pi}{1}$; sarà $7 : 22 = 1 : \pi$, cioè π dinoterà la circonferenza del cerchio, il cui diametro è 1.

Sicchè chiamando $2a$ il diametro di un cerchio, e C la sua circonferenza si avrà $1 : \pi = 2a$: circonferenza C; e sarà circonferen. $C = \pi . 2a$; e $2a = \frac{\text{circonf.}\, C}{\pi}$, espressioni, colle quali si calcola la circonferenza di un cerchio, conosciuto il suo raggio, ed all'opposto.

Essendo circonf. $C = 2a\,\pi$; si avrà cerch. $C = 2a\,\pi . \frac{1}{2}\, a = \pi a^2$, la quale è l'espressione del cerchio, il cui raggio è a.

274. Ci resta ad esaminare il rapporto di due angoli, ed allorchè sono misurati da archi appartenenti a circonferenze eguali; ed allorchè gli archi, che li misurano appartengono a due circonferenze qualunque.

Siano dunque $A'C'B'$, ACB due angoli; Fig 69 prendiamo i vertici di essi C', e C per centri, e con uno stesso raggio descriviamo gli archi $A'B'$, AB, che tagliano rispettivamente i di loro lati, e supponiamo sulle prime, che un angolo φ preso per unità di misura sia contenuto un numero m di volte nell' angolo $A'C'B'$, ed un numero n di volte nell' angolo ACB; sarà allora ang. $A'C'B'$: ang. $ACB=m : n$: indi formiamo gli angoli $A'C'x'$, $x'C'y'$... ACx, xCy... eguali all' angolo φ; saranno ancora eguali gli archi $A'x'$, $x'y'$..., Ax, xy..., da quali essi sono sottesi, e per conseguenza siccome l' angolo $A'C'x'$, ossia φ, si contiene in $A'C'B'$ un numero m di volte, così parimente l' arco $A'x'$ si conterrà in $A'B'$ lo stesso numero di volte; e quindi per la stessa ragione, l' arco Ax si contiene ancora un numero n di volte nell' arco AB; dunque si avrà arc. $A'B'$: arc. $AB=m : n$; ma nella stessa ragione di $m : n$ sono gli angoli $A'C'B'$, ACB, dunque sarà in fine ang. $A'C'B'$: ang. ACB=arc. $A'B'$: arc. AB.

Che se gli angoli $A'C'B'$, ACB sono incommensurabili; allora s' essi non sono anche nella ragione degli archi $A'B'$, AB, supponiamo che sia ang. $A'C'B'$: ang. ACB come un arco maggiore, o minore di $A'B'$, è all' arco AB; per esempio si supponga, che sia ang. $A'C'B'$: ACB=arc. AO maggiore di $A'B'$, è all' arco AB; in tal caso, fatto al punto C della

retta AC l' angolo ACB''=ang. $A'C'B'$, sarà ancora l' arco $A'B'=AB''$; quindi si avrà ang. ACB'':ang.ACB=arc.AO:arc.AB(per ipot.) ed alternando ang.ACB'' : arc.AO=ang. ACB : arc. AB. Concepiamo l' arco AO diviso in parti eguali ciascheduna più piccola di $B''O$; si avrà un punto di divisione I tra B'', ed O, ed allora essendo commensurabili gli angoli ACB, ACI, si avrà ang. ACB: ang. ACI=arc.AB : arc. AI(part. 1ª), e permutando ang.ACB:arc.AB=ang. ACI : arc.AI; ma abbiamo veduto essere ang. ACB:arc.AB=ang.ACB'':arc.AO; dunque si avrà ang.ACI : arc.AI=ang.ACB'' : arc.AO; ma è l' arco$AI<AO$; dunque sarà parimente l' angolo ACI minore dell' altro ACB'', cioè il tutto minore della parte, il che essendo un assurdo, è impossibile ancora, che sia l'angolo $A'C'B'$ all'angolo ACB come un arco AO maggiore di $A'B'$ è all' arco AB. In simil modo si dimostrerà, che neppure può essere l' angolo $A'C'B'$ all' angolo ACB come un arco minore di $A'B'$ e all' arco AB; dunque anche nel caso che i due angoli $A'C'B'$,ACB siano incommensurabili, si avrà ang. $A'CB'$: ang. ACB=arc. $A'B'$: arc. AB : dal che ne conchiuderemo generalmente, *che gli angoli sono nella ragione degli archi su quali poggiano descritti con eguali raggi*.

275.Si intendano nella medesima supposizione i settori $A'Cx'$, ACx rivoltati sugl' intieri settori $A'C'B'$, ACB; essendo tutti eguali gli angoli $A'C'x'$, $x'C'y'$...ACx, xCy..., non che gli archi $A'x'$, $x'y'$.. Ax, xy, i settori $A'C'x'$, $x'Cy'$... ACx, xCy...combaceranno, e quindi saranno eguali; sicchè l' arco Ax' si conterrà nell' arco A'B' un numero m di volte, ed un numero n nell' arco AB, così parimente un set-

tore $A'C'x'$ si conterrà nel settore $A'C'B'$ un numero m di volte, ed un numero n di volte nel settore ACB, e si avrà settore $A'C'B'$: settore $ACB = m : n$; ma è $m : n =$ arc. $A'C'$: arc. AB, dunque si avrà in fine settore $A'C'B'$: settore $ACB =$ arc. $A'B'$: arc. AB; cioè *i settori fatti ne' cerchi eguali sono tra loro nella ragione degli archi, su quali poggiano.*

276. Sia $AOBP$ la quarta parte del cerchio: paragoniamola ad un altro settore qualunque APO fatto nello stesso cerchio, si avrà sett. AOP : sett. $AOB = AP : AB$ (prec.), e permutando sarà sett. $AOP : AP =$ sett. $AOB : AB$, e quadruplicando i termini di quest' ultima ragione, si avrà sett. $AOP : AP =$ cerch. $ADCB$: circonf. $ADCB$, e permutando di nuovo si avrà set. AOP : cerch. $ADCB =$ arc. AP : circonf. $ADCB$, da cui se ne conchiude, che *ogni settore è all' intiero cerchio, come l' arco su cui esso poggia è all' intiera circonferenza del cerchio, cui appartiene.*

Fig. 65

277. Quindi, essendo sett. AOP: cerch. $ADCB =$ arc. AP : circonf. $ADCB$ (prec.) moltiplicando i termini di quest' ultima ragione per la metà del raggio OP del cerchio, si avrà

$$\text{sett.}AOP:\text{cer.}ADCB=\text{arc.}AP.\frac{OP}{2}:\text{circ.}ADCB.\frac{OP}{2};$$ ma è $\text{cerc.}ADCB=\text{circ.}ADCB.\frac{OP}{2}$ (271); dunque sarà ancora $\text{sett.}AOP=\text{arc.}AP.\frac{OP}{2}$: cioè *l' aja di un settore circolare è eguale al prodotto dell' arco, su cui poggia, per la metà del raggio di questo.*

278. Dunque poichè il segmento APm è eguale alla differenza del settore APO e del triangolo AOP, sarà l'aja del segmento eguale a quella del settore meno quella del triangolo, cioè si avrà

$$\text{segm.}\,APm = (\text{arc.}\,AmP - \text{cord.}\,AP)\,\frac{OP}{2}.$$

Cioè *l'aja di un segmento circolare è eguale al prodotto della metà del raggio del cerchio, cui esso appartiene, per la differenza tra l'arco, su cui poggia, e la corda, che sottende quest' arco.*

279. Abbiamo dimostrato al di sopra che gli angoli sono nella ragione degli archi su' quali poggiano descritti con egual raggio; or quattro angoli retti sono misurati dall' intiera circonferenza; dunque *ogni angolo è a quattro retti, come l'arco su cui poggia è all' intiera circonferenza.*

Fig. 70. 280. Co' vertici φ e φ' di due angoli eguali per centri, e con raggi diseguali descriviamo due cerchi BPC, $B'P'C'$, i quali saranno diseguali; siano A, A' gli archi BC, $B'C'$, su quali rispettivamente poggiano gli angoli eguali φ, φ'; e chiamiamo P, P' le rispettive circonferenze BPC, $B'P'C'$, e $4D$ quattro angoli retti; sarà perciocchè si è detto (prec.) $\varphi : 4D = A : P$, e $\varphi' : 4D = A' : P'$; ma porchè si ha $\varphi = \varphi'$, è ancora $\varphi : 4D = \varphi' : 4D$: dunque si ha parimente $A : P = A' : P'$; cioè *gli archi, che misurano angoli eguali, appartenenti a due circonferenze qualunque sono proporzionali alle intere circonferenze.*

281. Quindi poichè si ha sett. $BC\varphi$: cerc. $BPC = A$: circ. P, e sett. $B'C'\varphi'$: cerch. $B'P'C' = A'$: circonf. P' (276), se gli angoli φ, φ' compresi da' rag-

gi, che limitano il settore, sono eguali, essendo in tal caso A : circ. $P=A'$: circ. P' (280), sarà ancora sett. $BC\varphi$: cerch. BPC= sett. $B'C'\varphi'$: cer. $B'P'C'$; e permutando sett. $BC\varphi$: sett. $B'C'\varphi'$ = cerch. BPC: cerch. $B'P'C'$: cioè *i settori limitati da' raggi, che comprendono angoli eguali, sono proporzionali agl' intieri cerchi, de' quali fanno parte.*

282. Quando gli archi sono proporzionali alle intiere circonferenze, alle quali appartengono, si chiamano *archi simili*; e *simili* si dicono i settori, ed i segmenti, che poggiano su di essi; dunque *gli angoli eguali poggiano su di archi simili descritti con raggi a piacere, ed i settori simili sono proporzionali agl' intieri cerchi, de' quali fanno parte.*

283. Vediamo, se l' inversa è anche vera, cioè supponiamo simili due archi A, A', e vediamo, se gli angoli φ, φ' misurati da questi archi sono eguali. In virtù della supposizione si ha $A : P = A' : P'$ (prec.); ma è ancora $A : P = \varphi : 4D$ (279), ed $A' : P' = \varphi' : 4D$; dunque sarà $\varphi : 4D = \varphi' : 4D$, e quindi $\varphi = \varphi'$, da cui ne conchiuderemo, che *gli angoli misurati da archi simili sono eguali.*

284. Che se supponiamo sett. $BC\varphi$: sett. $B'C'\varphi'$ = cerch. BPC : cerch. $B'C'P'$, si avrà permutando sett. $BC\varphi$: cerch. BPC = sett. $B'C'\varphi'$: cerch. $B'P'C'$, ossia A : cir. $P=A'$: circ. P' (276); dunque saranno simili gli archi A, A', e quindi eguali gli angoli φ, φ' (prec.); dal che ne segue, che *allorchè i settori sono proporzionali agl' interi cerchi, de' quali fanno parte, gli angoli compresi de' raggi, da' quali sono essi limitati, sono eguali, e quindi i settori saranno simili.*

285. Siano A, A' due archi simili; e si menino agli estremi di essi B, C; B', C' i raggi φB, φC; $\varphi' B'$, $\varphi' C'$; ne sorgeranno due settori simili

$BC\varphi$, $B'C'\varphi'$: si chiamino R, R' rispettivamente i raggi φB, $\varphi' B'$ de' cerchi BPC, $B'P'C'$; sarà cer. $BPC=\pi R^2$, e cer. $B'P'C'=\pi R'^2$ (175): ciò posto si ha sett. $BC\varphi : \pi R^2 =$ arc. A : circ. P e sett. $B'C'\varphi' : \pi R'^2 =$ arc. A' : circonf. P' (276); ma per la simiglianza degli archi A, A' è arc. A : circonf. $P=$ arc. A' : circonf. P'; dunque sarà ancora sett. $BC\varphi : \pi R^2 =$ sett. $B'C'\varphi' : \pi R'^2$, e permutando sett. $BC\varphi$: sett. $B'C'\varphi' = \pi R^2 : \pi R'^2 = R^2 : R'^2$, dal che ne conchiuderemo che *i settori simili sono come i quadrati de' raggi de' cerchi ai quali appartengono.*

Fig. 70. 286. Non abbandoniamo l'ipotesi della simiglianza degli archi A, A'; saranno ancora simili i segmenti S, S', e saranno eguali gli angoli $B\varphi C$, $B'\varphi' C'$ (282); si chiami R il raggio φB, ed R' il raggio $\varphi' B'$; T il triangolo $B\varphi C$, e T' il triangolo $B'\varphi' C'$. Si tagli $\varphi' B = \varphi' B'$, e $\varphi' C = \varphi' C'$, e si congiunga $B'C'$; saranno eguali i due triangoli $B'\varphi C'$, $B'\varphi' C'$, che tra lati eguali comprendono gli angoli φ, φ' eguali; quindi essi saranno equiangoli e simili; ma è $B\varphi : C\varphi = B'\varphi' : C'\varphi'$, per esser $B\varphi$, $C\varphi$ i raggi del cerchio BPC; e $B'\varphi'$, $C'\varphi'$ i raggi del cerchio $B'P'C'$; dunque sarà allora $B\varphi : \varphi C = B'\varphi : \varphi C'$, e saranno per conseguenza simili i due triangoli $B\varphi C$, $B'\varphi C'$; e quindi essendosi dimostrato $B'\varphi C'$ simile a $B'\varphi' C'$, sarà ancora $B\varphi C$ simile al triangolo $B'\varphi' C'$, ossia T simile a T'. Ciò posto, essendo per ipotesi simili gli archi A, A', saranno simili i settori $BC\varphi$, $B'C'\varphi'$, e si avrà (prec.) sett. $BC\varphi$: sett. $B'C'\varphi' = R^2 : R'^2$: ma è ancora T simile a T'; sicchè si avrà $T : T' = R^2 : R'^2$: alterniamo ambidue queste proporzioni: la prima ci darà sett. $BC\varphi : R^2 =$ sett. $B'C'\varphi' : R'^2$; e la seconda $T : R^2 = T' : R'^2$, nelle quali, poicchè si osservano i conseguenti di co-

mune, si avrà set.$BC\varphi - T$: R^2=set.$B'C'\varphi' - T'$: R'^2 (...); ma è il segmento S=sett.$BC\varphi - T$, ed S'=sett.$B'C'\varphi' - T'$; dunque sarà seg.S:R^2=seg.S'-R'^2, ed alternando si avrà infine segm.S : segm.S' : R^2 : R'^2; da cui ne conchiuderemo, che *i segmenti circolari simili sono tra di loro come i quadrati de' raggi appartenenti a' cerchi, de' quali fanno parte.*

287. Essendosi dimostrato nell' ipotesi, che i settori $B C\varphi$, $B'C'\varphi'$ sono simili, sett.$BC\varphi$:sett.$B'C'\varphi'$= R^2 : R'^2; ma ora si è dimostrato, ch' essendo simili i due segmenti S, S', si ha $S : S'=R^2 : R'^2$; dunque sarà ancora

sett.$BC\varphi$: sett.$B'C'\varphi'=S$: S':

si ha ancora cer.πR^2.cer.$\pi R'^2=R^2 : R'^2$: dunque *i settori, i segmenti simili, ed i cerchi, a' quali essi appartengono hanno tra loro ragion di eguaglianza.*

288. Col centro φ si descrivano con raggi diseguali φB, $\varphi B'$ due archi BC, $B'C'$ tra' lati dell' angolo $B\varphi C$, e si completino i quadranti $B\varphi C$, $B'\varphi F'$: sulle prime essendo gli angoli $B'\varphi C'$, $B'\varphi F'$ misurati dagli archi $B'C'$, $B'F'$ descritti collo stesso raggio, si avrà $B'\varphi C'$: $B'\varphi F'$= arc.$B'C'$: arc.$B'F'$, e per la stessa ragione si avrà $B\varphi C$: $B\varphi F$=arc.BC : arc. BF; ma per esser $B'\varphi C'=B\varphi C$, e $B'\varphi F'=B\varphi F$, si ha $B'\varphi C'$: $B'\varphi F'=B\varphi C$: $B\varphi F$; dunque sarà arc. $B'C'$: arc.$B'F'$=arc.BC : arc.BF: or tanto l'arco $B'F'$, quanto l' arco BF è di 90°, sicchè si avrà infine arc.BC : 90°=arc.$B'C'$: 90°; cioè *gli archi* B'C', BC, *che sono descritti tra i lati di un angolo, prendendo il vertice di questo per centro, e de' raggi diseguali, hanno lo stesso numero di gradi e minuti.*

Fig. 70

289. Quindi gli angoli non sono misurati dalla

lunghezza degli archi descritti col loro vertice per centro, e con un raggio a piacere; ma bensì dal numero de' gradi, e minuti, ch'essi contengono. Infatti, se così non fosse, descritti tra' lati dello stesso angolo $B\varphi C$ col centro φ, e con raggi diseguali $\varphi B'$, φB gli archi $B'C'$, BC, questi, poicchè appartengono ad uno stesso angolo, saranno simili, e per conseguenza saranno proporzionali alle intiere circonferenze, delle quali fanno parte, ossia a' raggi $\varphi B'$, φB; cioè si avrà arc $B'C'$: arc. $BC = \varphi B'$: φB; ma i raggi $\varphi B'$, φB sono diseguali in lunghezza; dunque saranno egualmente diseguali in lunghezza gli archi $B'C'$, BC, nell' atto che l' angolo φ è lo stesso.

Fig. 70 290. Veniamo finalmente ad esaminare qual rapporto hanno fra loro due angoli diseguali descritti con raggi diseguali. Siano $B\varphi C$, $B'\varphi'A'$ due angoli diseguali, e presi φ, φ' per centri, e due raggi diseguali φB; $\varphi' B'$ si descrivano tra lati di questi angoli due archi BC, BA; indi fatto all' estremo φ' della retta $B'\varphi'$ l' angolo $B'\varphi'C' = B\varphi C$, collo stesso centro φ', e collo stesso raggio $\varphi'B'$ si compisca l'arco $B'C'$ compreso tra' lati dell' angolo $B\varphi'C'$. Allora, essendo eguali gli angoli $B\varphi C$, $B'\varphi'C'$, si avrà $B\varphi C$: $B'\varphi'A' = B'\varphi'C'$: $B'\varphi'A'$=arc. $B'C'$: arc. $B'A'$: ma è arc. $B'C'$: $B'A' = (B'C' : BC)(BC : B'A')$; dunque sarà $B'\varphi'C' : B'\varphi'A' = (B'C' : BC)(BC : B'A')$; ma per esser eguali gli angoli φ', φ è $B'C'$: BC = circonf. P' : circonf. P = ragg. $\varphi'B'$: rag. φB; dunque sostituendo si avrà $B\varphi C : B'\varphi'A' = (\text{ragg.}\,\varphi'B' : \text{rag.}\,\varphi B)(BC : B'A')$; dal che ne conchiuderemo che *se tra' lati di due angoli diseguali co' loro vertici per centri, e con raggi diseguali si descrivano due archi, quegli angoli saranno in ragion composta della diretta degli archi, su quali poggiano, e dell' inversa de' raggi dei cerchi.*

ALCUNI FACILI PROBLEMI GEOMETRICI PER ESERCIZIO DE' GIOVANETTI.

291. Per applicare le teorie esposte nella geometria piana, ed insieme per avvezzare i giovanetti a maneggiare l'analisi geometrica, di cui abbiamo fatto uso nel corso di questa istituzione di geometria, noi ci abbiamo fatto un dovere di quì soggiungere alcuni facili problemi di geometria piana.

292. *Data una retta* AC, *si domanda dividerla in un punto, in modo che le sue parti risultanti siano in una data ragione di* m : n. Fig. 54

Supponiamo che O sia il punto di divisione; si avrà $AO : OC :: m : n$: allora se in ordine ad m, ed n ed ad una retta qualunque P si ritrovi una parta proporzionale, fatto un'angolo a piacere ACB, e tagliata CF eguale alla quarta proporzionale ritrovata, ed $FB=P$, si avrà $BF : FC=AO : OC$, cosicchè congiungendo i punti A, B, O, F colle rette AB, OF, queste riusciranno parallele. Segue da quest'analisi, che resterà sciolto il problema, se, fatto all'estremo C della retta AC un angolo a piacere ACB, e tagliata CF quarta proporzionale in ordine a m, n, P, ed $FB=P$, si congiunga BA, e dal punto F gli si meni la parallela FO: il punto O sarà il punto richiesto.

293. *Dividere una retta* AC *in un punto, in modo, che il rettangolo delle parti sia eguale ad una data quantità.* Fig 58

Supponiamo che D sia il punto che si domanda, e supponiamo insieme che la data quantità sia un quadrato P^2, il che può farsi (79); sarà $AD.DC=P^2$; allora, descritto su di AC un

semicerchio, e supponendo da D elevata la perpendicolare DB fino all' incontro della semicirconferenza, si avrebbe ancora $AD.DC=DB^2$; quindi sarà $AD=P$, e supponendo compito il parallelogrammo DF, si avrà $AF=P$. Segue da quest' analisi, che resterà sciolto il problema, se, descritto sopra di AC un semicerchio, ed elevata da A la perpendicolare $AF=P$, si meni da F la retta FBB' parallela ad AC, e da' punti B, B', ove questa incontra la semicirconferenza, si abbassino le rette BD, $B'D'$ perpendicolari ad AC; i punti D, D' soddisferanno alla condizione del problema.

Fig. 64 194. *Prolungare una retta* PP' *in modo, che il rettangolo della somma di* PP' *e della parte aggiunta nella parte prolungata sia eguale ad una data quantità.*

Sia $P'O$ la parte prolungata, e P^2 esprima la data quantità; sarà $PO.OP'=P^2$; allora descritto su di PP' un cerchio, e supponendo da O menata al cerchio una tangente OF, si avrebbe ancora $PO.OP'=OF^2$, e quindi $OF=P$, cosicchè elevando da P' una perpendicolare $P'M=P$, e menata dal centro pel punto di contatto una retta QF, la quale prolungata dovrà incontrare la $P'M$ in M per l' eguaglianza de' due triangoli $MP'Q$, OFQ, che sorgono da questa costruzione, si avrà $QO=QM$. Segue da quest' analisi che resterà sciolto il problema, se elevata da P' su di PP' una perpendicolare $P'M=P$, e descritto su di PP' un cerchio, si meni dal centro Q del cerchio al punto M la retta QM, ed indi prolungata PP' verso O, si tagli $QO=QM$: infatti da questa costruzione, menata la tangente OF, si ha $P'M=OF$, ed essendo ancora $PO.OP'=OF^2$, sarà $PO.OP'=P'M^2=P^2$.

195. *Dati due punti B, C, e data di sito una retta MN, ritrovare sulla MN un punto, col quale congiunti i punti B, C, sia l' angolo, che in questo punto fanno le congiungenti, eguale ad un angolo dato φ.* Fig.71.

Supponiamo che O' sia un tal punto; allora congiungnendo le rette BO', CO', sarà l' angolo $BO'C=\varphi$; ciò posto se si congiunga BC, e per i punti B, O', C si supponga che passi una circonferenza circolare, il segmento $BO'C$ sarà il luogo di tutti gli angoli eguali all' angolo dato φ; ed i punti O, O', ne' quali la retta MN taglia l' arco $BOO'C$ soddisfaranno alle condizioni del Problema. Dunque, se si congiungano i punti B, e C, e sulla BC si costruisca il segmento $BO'C$ capace dell' angolo φ, i punti O, O', ove l' arco $BO'C$ incontrerà la retta MN data di sito, scioglieranno il problema, cioè gli angoli BOC, $BO'C$ saranno gli angoli richiesti.

La soluzione di questo problema si è ottenuta colla combinazione di due luoghi geometrici, cioè della retta, e del cerchio; se mai questi si considerano separatamente, il problema sarà indeterminato; infatti allora sarà soddisfacente ciascun punto della retta MN, o dell' arco $BO'C$

196. *Dati tre punti A, B, C non per dritto, farci passare tre rette AO, BO, CO, le quali si uniscano in un sol punto O, e facciano gli angoli AOB, BOC eguali rispettivamente a due angoli dati φ, e θ.* Fig.72

Se l' angolo AOB è eguale all' angolo φ, esso dovrà trovarsi in un segmento circolare $AoFB$ che poggia sopra di AB, e che sia capace del dato angolo φ: per la stessa ragione, supponendo l' angolo BOC eguale all' angolo θ, il suo luogo dovrà essere il segmento circolare $BGOC$ costruito sopra AC, e capace del dato angolo θ;

dunque tutt' i punti dell' arco $AOFB$ saranno i punti d' incontro di tutte le rette che si menano à punti A, e B, e che fanno l' angolo dato φ, e tutt' i punti dell' arco $BGOC$ saranno i punti d' incontro delle rette, che si menano à punti B,C, e che fanno tra loro l' angolo θ; ma i vertici de' due angoli debbono trovarsi nello stesso punto; dunque questo sarà il punto O, ove si segano i due segmenti. Dall' analisi precedente ne segue la composizione seguente: Si uniscano i punti A e B; B, e C; su di AB si costruisca un segmento circolare capace del dato angolo φ, e su di BC si costruisca un altro segmento circolare capace dell' altro angolo θ; indi dal punto O, ove gli archi s' incontrano, si menino à punti A,B,C le rette OA,OB,OC; si avrà l' angolo $AOB=\varphi$, e $BOC=\theta$, il che è chiaro.

Fig. 73. 197. *Trovare un punto, che dista da' lati di un angolo dato DAB per due quantità date a, b rispettivamente.*

Supponiamo, che C sia il punto in quistione; allora abbassate da C sù lati AD, AB dell' angolo le perpendicolari CH, CK, sarà $CH=a, CK=b$; e l' punto C si troverà all' intersezione delle due rette EO, FP menate respettivamente parallele à lati del dato angolo nella rispettiva distanza. Da quest' analisi se ne tira la seguente soluzione sintetica. Da un punto qualunque D preso sul lato AD si elevi la perpendicolare $DE=a$, e da un punto qualunque P preso sull' altro lato AB si elevi la perpendicolare $BP=b$; indi per i punti E, e P si facciano passare le rette EO, PF rispettivamente parallele ad AD, AB; il punto C, ove queste due parallele s' intersegano, sarà il punto in quistione, il che è chiaro.

198. *Data la base, e l' angolo al vertice di un triangolo isoscele, costruire il triangolo.* Fig. 74.

Sia AC la base data, e φ l' angolo dato; se ABC fosse il triangolo richiesto, si avrà l'angolo $ABC=\varphi$, e quest' angolo poggierà il suo vertice in un punto B della perpendicolare (16,35). Quindi se su di AC si elevi la perpendicolare DO, ed indi sulla stessa AC si costruisca un segmento circolare capace del dato angolo φ, il punto B, ove questo segmento incontra la perpendicolare, sarà quello, da cui menate à punti A, e C le rette BA,BC, ne risulterà il triangolo isoscele richiesto.

199. Poicchè l'angolo ABH è supplemento dell' angolo ABC, si avrà l' angolo ABH eguale alla somma degli angoli BAC,BCA (36); ma questi sono eguali (37); dunque *l' angolo ABH supplemento dell' angolo al vertice di un triangolo isocele è doppio di ciascun angolo alla base.*

Da ciò se ne tira la seguente soluzione del precedente problema. Si faccia sul prolungamento di AC nel punto C l' angolo $ECF=\varphi$; ed indi l' angolo ACE si divida per metà colla retta CB; si congiunga il punto B col punto A, sarà ABC il triangolo richiesto: infatti, essendo ECF supplemento dell' angolo ACE, sarà (precedente) l' angolo ACB metà di ACE uno degli angoli alla base del triangolo isoscale, e quindi sarà il punto B, ove la CB incontra la perpendicolare, il vertice del triangolo richiesto, ed ACB sarà il triangolo.

200. *Dato il lato AB del triangolo ABC, un angolo φ adjacente a questo lato, e la somma degli altri due lati, costruire il triangolo.* Fig. 75.

Al punto B delle retta AB si faccia l' an-

golo $ABE=\varphi$, e su di BE si tagli BD eguale alla somma degli altri due lati. Ciò posto suppongasi, che ACE sia il triangolo richiesto; allora essendo $BD=AC+CB$, toltane CB di comune, rimarrà $CD=CA$. Il problema dunque si riduce a determinare nella BD un punto C equidistante da punti A, e D: supponiamolo ritrovato, e sia C; allora, congiunta AD; poichè è $CA=CD$; se dal punto C si meni una perpendicolare sopra di AD, questa cadrà sulla metà H della retta AD (16). Dall' analisi precedente se ne tira la seguente soluzione sintetica. Si faccia al punto B della retta AB l' angolo $ABC=\varphi$, e taglisi BD eguale alla somma degli altri due lati del triangolo: di poi si unisca AD, e divisa per metà in H, dal punto H si elevi la perpendicolare HC, finchè incontri la BD nel punto C, si unisca il punto A col punto C, sarà ACB il triangolo richiesto; infatti esso ha il lato AB, e l' angolo dato, ed i due lati AC, CB formano la data somma AD.

Fig. 76. 201. *Data la base di un triangolo rettangolo, la somma de' rimanenti lati, e della perpendicolare, cioè $AB+BC+BD$, determinare il triangolo.*

Sia ABC il triangolo che si domanda, AC la sua base: sia FH la somma de' lati, e della perpendicolare di un tal triangolo; si prolunghi FH verso E, e si tagli $HE=AC$; sia GE il perimetro del triangolo sarà FC la sua altezza; quindi FE sarà eguale al perimetro più la perpendicolare BD. Ciò posto per la natura del triangolo rettangolo si avrà $FE:EG=\frac{EG}{2}:EH$ (a)

(a) NeWton nell' Aritmetica universale ha dimostrato, che in ogni triangolo rettangolo la somma de' suoi lati e della perpendicola-

invertendo si avrà $EG:FE=EH:\frac{EG}{2}$; alternando, e di nuovo invertendo, sarà $EH:EG=\frac{EG}{2}:FE$, e quindi $2EH:EG=EG:FE$ (1); ma poichè è data tanto $2EH$, quanto FE, sarà dato la ragione de' termini estremi di queta proporzione; dunque è data la ragione di $2EH:EG$ (24. *dat. di Euc.*); ma $2EH$ è data, dunque è dato di grandezza ancora il perimetro EG; toltone EH, sarà HG la somma de' lati del triangolo; ma è data FH per le condizioni del Problema; dunque sarà data ancora FG. La composizione di questo problema, si ha dalla proporzione (1); cioè si ritrovi tra la doppia base AC e la data somma del perimetro e della perpendicolare una media proporzionale; sarà questa il perimetro del triangolo; allora dalla data EF toltone EG, la rimanente FG sarà la perpendicolare di un tal triangolo rettangolo: quindi, per costruirlo, su di AC si descriva un semicerchio, ed elevata dal punto H una perpendicolare $AK=FG$, si meni da K la retta KP parallela ad AC; si uniscano i punti B, e P co' punti A,C, il triangolo ABC, o APC sarà il triangolo richiesto, il che è chiaro.

202. *Dato un punto N fuori di una retta AB, si domanda descrivere un cerchio, che passi pel punto N, e che tocchi la retta data AB in un dato punto M* Fig. 77

re sta alla somma de' lati, come la metà di questa somma è alla base. Vedi la nostra analisi a due scoordinate (23). Chi volesse dimostrare questo teorema sinteticamente, supponendolo vero, potrà coll'analisi geometrica giugnere da conseguenza in conseguenza ad una verità nota in geometria, ed indi ricomporre l'analisi.

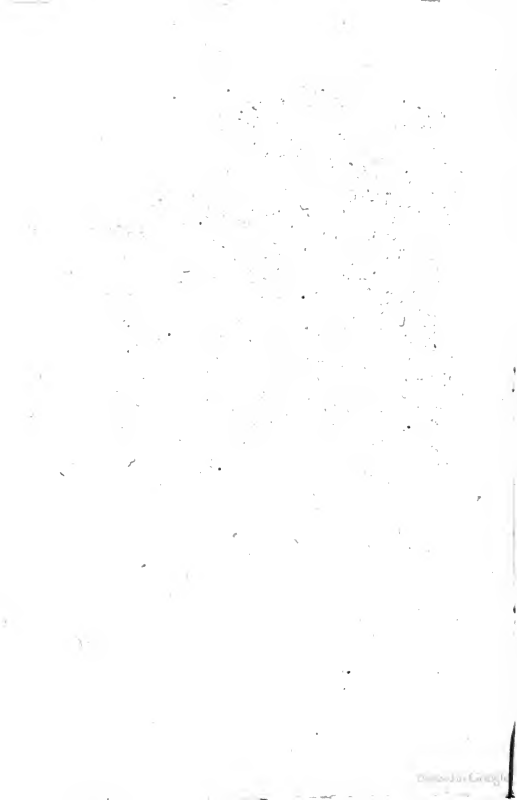
Si supponga sciolto il problema ; allora uniti i punti M, e i N, la retta NM sarà corda di tal cerchio ; quindi il raggio di questo cerchio dovrà trovarsi sulla retta CO elevata perpendicolarmente dal punto O metà della retta MN (107); dippiù, poichè AB è tangente al cerchio nel punto M; se da M si elevi una perpendicolare, questa dovrà parimente passare pel centro del cerchio (123) ; allora il punto C incontro delle rette OC, CM sarà il centro del cerchio in quistione , e CM sarà il raggio , il che è chiaro .

Fig.78 203. *Dati due cerchi PFG, pfg di grandezza, e di posizione ; si domanda menare loro una tangente comune .*

Suppongosi condotta la tangente comune , e sia BfF; allora, menati dà punti di contatto f, F, i raggi fO FO , saranno simili i triangoli fBO , FBO , che hanno l' angolo in B di comune , e gli angoli in f, e F retti ; quindi si avrà $OF : of = OB : oB$, e dividendo $OF - of : of = Oo : oB$; ma i tre primi termini di questa proporzione sono noti , giacchè i cerchi sono dati di grandezza, e di posizione ; dunque sarà nota parimente oB , e quindi il punto B, che scioglierà il problema. Da quest' analisi se ne tira la seguente soluzione sintetica . Si meni da O una retta qualunque Oq, e, tagliata $mn = of$, si unisca il punto m col punto o, e da n gli si meni la parallela nB ; sopra di Bo si descriva un semicerchio , il quale incontrerà in f il cerchio fgp ; si unisca il punto B col punto f; la retta Bf si prolunghi ; sarà questa la tangente comune . Infatti essendo per costruzione $Om : mn :: Oo : oB$; ma è $mn = of$ ed $On = OF$; dunque sarà $OF - of : of = Oo : oB$, e com-

ponendo $OF:of=OB:oB$; quindi i punti f,F saranno per diritto, ed apparterranno alla stessa retta BF, ed i triangoli Bof,BOF saranno simili: or l' angolo Bfo è retto, perchè fatto nel semicerchio; dunque retto sarà parimente l' angolo BFO, e le rette Bf,BF, ossia la retta BC sasà tangente comune de' due cerchi.

204. *Descrivere un cerchio, che tocchi un cerchio dato AQM in un punto M, e che riesce insieme tangente ad una data retta AB.* Fig. 79

Sia BPM il cerchio in quistione, e C il suo centro; allora congiungendo il punto M col centro O del cerchio AQM, la congiungente OM passerà pel centro del cerchio BPM (124); si meni da M una tangente MA al cerchio AQM, la quale dovrà esser anche tangente dell' altro cerchio; e le due rette AB, AM si prolunghino finchè s' incontrino: in tal modo se si divida per metà l' angolo MAB, il centro del cerchio BPM sarà ancora in questa bisegante: dunque il centro del cerchio in quistione sarà il punto C, ove incontrano le rette OC, AC, e 'l raggio sarà CM; il che è chiaro.

INDICE

Della Geometria piana.

Idea della parola Geometria: sua origine, e progressi. Benchè lo spazio non abbia veruna forma; pure noi ci avvezziamo a considerare la quantità come parti figurate, ed estese dello spazio, cosicchè la grandezza, e la forma di esse dipende della grandezza, e dalla figura de' limiti, che diamo allo spazio. La considerazione di questi limiti fa sorgere l'idea dell'estenzione, quell' appunto, che forma l'oggetto della Geometria. Si può concepire una porzione dello spazio limitata da due soli punti, o racchiusa tra limiti di sola lunghezza, o tra limiti di lunghezza, e larghezza. Chiamasi linea l'estenzione, i cui limiti sono i punti, superficie l'estenzione, che ha per limite le linee, e solido l'estenzione, i cui limiti sono le superficie. Dunque il solido ha tre dimenzioni, lunghezza, larghezza, e profondità, la superficie ne ha due, lunghezza, e larghezza, la linea ne ha una, cioè la sola lunghezza. Le linee, e le superficie isolatamente esistono nel campo dell'astrazione. pag. 1—3

La più semplice di tutte le linee è la retta: genesi di essa: ogni altra di diversa genesi dicesi curva. Segue dall'idea della retta, che tra due punti non vi si può menare, che una sola retta; che la retta è la più corta, e la più semplice di quelle, che sono tra gli stessi limiti: e che la retta misura la distanza tra due punti 3

Idea della superficie piana, e sua genesi uniforme a quella della retta: ogni altra superficie di genesi diversa dicesi superficie curva. Quindi sulla superficie piana si può sempre adattare una retta in tutt' i sensi 3

Come osservare se due limiti della stessa specie siano uguali, o diseguali? Principio di soprapposizione. Idea geometrica della parola *misurare*. 4

Quando due quantità si dicono date di posizione? Posizione d'infiniti punti situati su di una superficie piana ad egual distanza da un punto fisso: questa considerazione fa sorgere l'idea del cerchio, e sua circonferenza; Centro, raggi, diametro, corda, segmento, arco, e settore circolare. Divisione della circonferenza circolare in gradi, ed in minuti 4—6

La genesi della circonferenza circolare ci porta all'idea dell'angolo. Angolo piano, curvilineo, rettilineo, mistilineo, retto, acuto, ottuso. 7—8

Le linee, che formano un angolo retto, diconsi perpendicolari. La perpendicolare non ha, che una sola posizione riguardo la retta, cui è perpendicolare: Quindi essa misura la distanza di un punto da una retta; per un punto non può passarvi che una sola perpendicolare; gli angoli retti sono eguali, l'ottuso è maggiore del retto, e l'acuto n'è minore. Angoli supplementi, e complementi. 8

Analogia tra l'angolo, e l'arco descritto col suo vertice per centro. Quindi angoli eguali, che poggiano i loro vertici al centro di una stessa circonferenza, e di circonferenze eguali, tagliano archi eguali: Le corde che sottendano questi archi sono eguali; Le rette,

che congiungono lati uguali di due angoli eguali, sono eguali, e generalmente due angoli, gli archi descritti collo stesso raggio, presi i vertici di essi per centri, e le rette congiungenti due punti presi ne' lati degli angoli ed egual distanza da' loro vertici, hanno tal nesso tra loro, che l' egualità degli uni porta quella degli altri 9—10

Costruire ad un punto di una retta un angolo rettilineo eguale ad un angolo dato 11

Dividere per metà un dato angolo rettilineo. La divisione dell' angolo in un numero di parti eguali è un problema identico a quello della divisione dell' arco corrispondente nello stesso numero di parti eguali 11—12

Dividere una data retta per metà 12—13

Una retta che passa per due punti equidistanti dagli estremi di un' altra retta, è perpendicolare a questa 13

Dato un punto su di una retta, innalzarvi da questo una perpendicolare 13—14

Da un punto esistente fuori di una retta indefinita abbassare su di questa una perpendicolare 14

Ogni punto della perpendicolare elevata sulla metà di una retta serba egual distanza dagli estremi di essa 14

Le obblique eguali, che si menano su di una retta da un punto, sono egualmente distanti dal piede della perpendicolare menata dallo stesso punto sulla stessa retta, ed all' opposto 14—15

Di tutte le rette menate da un punto su di una retta, la perpendicolare è la minima, e le obblique, che più si discostano dalla perpendicolare sono maggiori delle più vicine 15

Se una retta cade su di un' altra, gli angoli adjacenti sono eguali a due retti 15

Se due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali 15—16

La somma di tutti gli angoli fatti in un punto equivale a quattro retti; quindi la circonferenza circolare misura quattro angoli retti. 16

Se dall' estremo di una retta si tirano per direzioni opposte due altre rette, che formano colla prima gli angoli supplementi tra loro, queste due rette saranno per diritto 17

Se ad uno stesso punto di una retta cadano due altre rette per direzioni opposte, in modocchè gli angoli opposti al vertice riescano eguali, tali rette formeranno una sola retta continuata. 17

Rette parallele. Una retta che passa per due punti situati dalla stessa parte ad egual distanza da un altra retta, gli è parallela. Dunque due rette parallele non s' incontrano giammai, ed all' opposto; Le Perpendicolari, che si menano tra due rette parallele, sono eguali 17—18

Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele 18

Criterio per il parallelismo di due rette. Se due rette sono segate da un' altra nello stesso piano, e fanno gli angoli interni dalla medesima parte eguali a due retti, o gli angoli corrispondenti eguali fra loro, o pure gli alterni, tali rette saranno parallele. Poblema di menare da un punto una retta parallela ad un altra retta. Le inverse delle precedenti sono ancora vere. Quindi non sono parallele due rette, che formano la somma gli angoli interni dalla stessa parte minore o maggiore di due retti 18—21

Se due angoli hanno i lati paralleli, e diretti per lo stesso verso, saranno eguali 21—22

Due rette parallele ad una terza, sono parallele tra loro 22

Incontro scambievole di tre rette su di uno stesso piano - Triangolo: il triangolo può essere equilatero, isoscele, o scaleno 22—23

Se in un triangolo si prolunga un lato, l'angolo esterno è eguale ad ambidue gl' interni, ed opposti, e tutti tre gli angoli del triangolo sono eguali a due retti Quindi un triangolo non può avere più di un angolo retto, ed a più forte ragione non può avere più di un angolo ottuso; allora gli altri due angoli sono acuti; tutti e tre gli angoli del triangolo però possono essere acuti. Chiamasi rettangolo il triangolo che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, acutangolo quello che ha tutti e tre gli angoli acuti. Nel triangolo rettangolo chiamasi ipotenusa il lato opposto all'angolo retto; e catetti i lati, che comprendono l'angolo retto. Se sono dati due angoli di un triangolo, o la loro somma, si conoscerà il terzo, come supplemento a due retti. Quindi sono equiangoli due triangoli, che hanno due angoli eguali a due angoli rispettivamente 23—24

Nel triangolo isoscele a' lati eguali si oppongono angoli eguali. Dunque il triangolo equilatero è anch' equiangolo, e ciascun angolo di esso vale un terzo di due retti. Dippiù un triangolo equilatero non può esser rettangolo, e molto meno ottusangolo. Ciascheduno degli angoli acuti di un triangolo isoscele rettangolo equivale alla metà di un retto. Se i lati del triangolo isoscele si prolunghino, gli angoli, che ne sorgeranno al di sotto della base, saranno anche eguali 24—25

Ne' triangoli ad angoli eguali si oppongono lati eguali. Dunque il triangolo equiangolo è anch' equilatero. Il lato maggiore di un triangolo tiene dirimpetto l'angolo maggiore, ed all'opposto 25—28

Due lati di un triangolo sono maggiori del terzo. Problema di costruire un triangolo, di cui ne sono dati i lati 27—28

Analisi de' triangoli considerati in paragone. Quando due triangoli si dicono eguali, e quando equivalenti. Costruzione geometrica di un triangolo, di cui ne sono dat' i lati. 1. Due triangoli equilateri tra loro sono eguali. 2. Sono anch' eguali due triangoli che tra due lati rispettivamente eguali hanno l'angolo compreso eguale. Costruzione geometrica di un triangolo, di cui ne sono dati due lati, e l'angolo compreso; 3. Sono parimente eguali due triangoli, quando hanno un lato eguale o adjacente a due angoli eguali rispettivamente a due angoli, o opposto ad angoli eguali. Costruzione geometrica di un triangolo, di cui n' è dato un lato, e due angoli. 4. Finalmente sono eguali due triangoli, quando hanno due lati rispettivamente eguali a due lati, e degli angoli non compresi due eguali, e due della medesima specie. 28—33

Se su di una stessa base si formi una serie di triangoli con differenti lati, ne verrà che minori lati comprenderanno un angolo maggiore 33

Se due triangoli hanno tra due lati rispettivamente eguali gli angoli compresi disegnali, il terzo lato opposto all' angolo maggiore in uno di essi, sarà maggiore del terzo lato opposto nell' altro all' angolo minore. L'inversa è anche vera. 34—35

Incontro di più di tre rette. Figure quadrilatere. Se due rette sono eguali, e parallele, le congiungenti dalla stessa parte saranno ancora eguali; o parallele. La figura quadrilatera, che ha i lati op-

posti eguali, e paralleli, dicesi parallelegrammo. Diagonale 35—36

I supplementi de' parallelogrammi intorno la diagonale sono eguali fra loro 37

Dati due lati di un parallelogrammo, e l'angolo compreso, è dato il parallelogrammo. Costruzione geometrica di un parallelogrammo, di cui ne sono dati due lati, e l'angolo compreso. Condizioni particolari, perchè il parallelogrammo si chiami rombo, romboide, rettangolo, quadrato. 37—38

I parallelogrammi intorno la diagonale di un quadrato sono parimente quadrati: La diagonale divide per metà gli angoli opposti del quadrato 38—39

Il quadrato di una retta divisa comunque è eguale à quadrati di ciascheduna parte, insieme col doppio rettangolo contenuto da esse parti 39

Il quadrato fatto sulla differenza di due rette pareggia i quadrati delle rette meno il doppio rettangolo fatto dalle medesime 39—40

Se un parallelogrammo, ed un triangolo poggiano sulla stessa base, o su basi eguali, ed hanno la medesim' altezza, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo 40

I parallelogrammi, ed i triangoli che hanno eguali le basi, e le altezze sono equivalenti, i primi, ed i secondi tra loro. 40—41

Se sulla stessa base, o su basi eguali si costruiscano dalla stessa parte due triangoli equivalenti, la retta che unirà i vertici di essi sarà parallela alla base 41

Costruire un triangolo equivalente ad un triangolo dato 41

Sono equivalenti un parallelogrammo, ed un triangolo, quando avendo la stess' altezza, o la stessa base, questo secondo ha nel primo caso una doppia base, e nel secondo un'altezza doppia di quella del primo; quindi un triangolo è doppio di un altro, che ha la metà della sua base, o altezza 41—42

Problemi, cha dipendono da questa teoria. Dato un triangolo, trasformarlo in un parallelogrammo equivalente: si scioglie lo stesso problema, allorchè il parallelogrammo si assoggetta alla condizione di avere un angulo eguale ad un angolo dato, o un lato eguale ad una retta data 42—44

Trasformare un qualunque rettilineo in parallelogrammo sotto un dato angolo 44—45

Trasformare un parallelogrammo in un triangolo equivalente. Se ne deduce il generalissimo problema di trasformare un rettilineo qualunque in un altro equivalente, e che abbia un lato di meno 45—46

Trasformare un quadrato in un rettangolo equivalente, che abbia per base una data retta. Se ne deduce il teorema di Pitagora, che in ogni triangolo rettangolo il quadraro dell' ipotenusa è eguale alla somma de' quadrati de' catetti. Si dimostra anche l' inversa 46—48

In ogni triangolo rettangolo il quadrato di un catetto è eguale al rettangolo dell' intiera ipotenusa nel segmento adjacente, che taglia la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto 49

I lati di un triangolo rettangolo hanno tal nesso tra loro, che da due se ne può rilevare il terzo. Ritrovare un quadrato eguale alla differenza di due dati quadrati, o alla somma di più quadrati 49—50

Trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente; quindi ogni figura rettilinea può esser trasformata in quadrato. Questo è ciocchè dicesi *quadrare* un rettilineo 50—5

In qualunque triangolo il quadrato fatto sopra un lato opposto all'angolo acuto è eguale à quadrati degli altri due lati meno il doppio rettangolo fatto da uno di questi lati nel segmento adjacente, che taglia la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo opposto. L' inversa è anche vera. 51—53

Il quadrato fatto sul lato opposto all' angolo ottuso di un triangolo è eguale à quadrati degli altri due lati più il doppio rettangolo fatto da un lato nella porzione che ad esso aggiugne la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angol' opposto. L' inversa è anche vera 53—54

Dat' i lati di un triangolo, ritrovare l' altezza not.—54

Se in un triangolo qualunque si unisca il vertice di un angolo colla metà di un lato, sarà la somma de' quadrati degli altri due lati il doppio della somma de' quadrati della congiungente, e della metà del lato diviso. 54—55

In ogni parallelogrammo le diagonali, e le rette che uniscono i punti di mezzo de' lati opposti si bisegano vicendevolmente nello stesso punto, e generalmente una retta condotta pel punto, ove s' incontrano le biseganti, e prolungata fino all' incontro de' lati del parallelogrammo, resta nello stesso punto bisegata. 55—56

In ogni parallelogrammo, la somma de' quadrati de' lati è eguale alla somma de' quadrati delle due diagonali. 56

Teoremi, che riguardano l' egualità di un parallelogrammo alla somma, e differenza di altri parallelogrammi. Il rettangolo contenuto da una retta indivisa, e da un' altra divisa in parti è eguale alla somma de' rettangoli contenuti dall' indivisa, e da ciascuna parte della divisa. 56

Il rettangolo contenuto da una retta divisa comunque, e da una sua parte è eguale al quadrato di questa parte insieme co' rettangoli fatti da questa stessa, e dalle altre parti. 57

Se una retta è divisa in un punto, la somma de' quadrati fatti uno sull' intiera retta, e l' altro su di una delle sue parti è eguale al doppio rettangolo fatto dall' intiera retta, e dalla stessa parte, insieme col quadrato dell' altra parte. 57

Se una retta sia divisa in un punto, il quadrato fatto sulla somma dell' intiera retta, e di una sua parte è eguale al quadruplo rettangolo fatto dall' intiera retta nella stessa parte insieme col quadrato dell' altra parte. 58

Se una retta si seghi per metà, e per diritto le si aggiunga un' altra retta, il quadrato fatto sulla somma della prima retta, e dell' aggiunta insieme col quadrato fatto sull' aggiunta sarà doppio del quadrato fatto sulla metà della retta data, e dell' altro formato sulla somma dell' altra metà, e della rett' aggiunta. 58

Se una retta si divida per metà, e disegualmente in un altro punto, la somma de' quadrati delle parti diseguali sarà doppia di quelle de' quadrati fatti uno sulla metà della retta data, e l' altro sulla retta che rimane trà punti delle divisioni 58

Se una retta è divisa per metà, e disegualmente in un altro punto, il quadrato della metà di essa sarà eguale al rettangolo delle parti diseguali insieme col quadrato della retta situata tra' punti delle divisioni. 59

Il rettangolo fatto della somma, e dalla differenza di due rette

diseguali è eguale alla differenza de' quadrati fatti sulle medesime rette . 59

Se una retta si divida per metà in un punto, e per diritto le si aggiunga un' altra retta, sarà il quadrato fatto sulla somma della metà della retta data, e dell' aggiunta eguale al rettangolo fatto dall' intiera retta e dall' aggiunta, insieme col quadrato della retta situata tra punti di divisione. 59—60

Il rettangolo fatto da due rette, ambe divise in parti, è eguale alla somma de'rettangoli delle parti una per le parti dell' altra. 60

L' Aja di un rettangolo è l' insieme di tanti metri quadrati, quanto è il prodotto del numero di metri lineari, ne'quali si sono divisi i suoi lati: similmente si valuta l' aja di un parallelogrammo, di un triangolo, di un rettilineo qualunque. L' aja di un trapezio a basi parallele è eguale a tanti metri quadrati, quanto è il numero de' metri lineari, che contiene la sua altezza moltiplicati per quelli, che sono nella semisomma delle basi parallele. Allorchè i lati di un qualunque rettilineo non sono perfettamente divisibili in metri, si dividono nelle parti dell' infima specie, che contengono. 60—63

Incontro vicendevole di più rette comunque su di un piano. Poligono. Gli angoli interni di un qualunque poligono sono eguali a tante volte due retti, quanti lati esso ha meno due. Dunque gli angoli esterni di un poligono qualunque, che non ha angoli rientranti, sono eguali a quattro retti. 63—64

Poligono regolare; suo centro. Tutte le rette, che dal centro di un poligono regolare si conducono à vertici degli angoli di esso, bisegano questi angoli, e sono eguali tra loro, e viceversa le rette, che bisegano gli angoli di un poligono regolare, passano pel suo centro. 64—66

Apotema del poligono regolare, L' aja di un poligono regolare è eguale al suo perimetro moltiplicato pel suo apotema. 66—67

Se col centro di un poligono regolare, e col raggio eguale alla distanza del centro da uno de' suoi angoli si descriva un cerchio, questo passerà per tutti gli angoli del poligono. Questa circonferenza dicesi circoscritta al poligono, e'l poligono dices' inscritto. Dunque ad ogni poligono regolare può esser circoscritto un cerchio; il poligono, e 'l cerchio circoscritto hanno uno stesso centro. 67

Cerchio. Ogni raggio, che passa per la metà di una corda è perpendicolare ad essa, e pass' ancora per la metà dell' arco sotteso da detta corda. L' inversa è anche vera. Quindi la perpendicolare elevata sulla metà di una corda dovrà passare pe'l centro del cerchio, cui appartiene la corda. 67—68

Dato un cerchio, ritrovare il suo centro. 68

Compiere una circonferenza circolare, di cui se ne conosce una parte. 68—69

Dato un arco dividerlo per metà. 69

Se da un punto esistente dentro di un cerchio possono menarsi alla sua circonferenza più di tre rette eguali, un tal punto sarà il centro del cerchio. Il problema di circoscrivere una circonferenza circolare ad un triangolo è analogo a quello di far passare un cerchio per tre punti. Per tre punti non può passarvi, che un sol cerchio. Quindi due circonferenze circolari distinte non possono aver di comune, che due punti, o un solo. Le prime si dicono seganti, le seconde tangenti. 69—71

Due cerchi, che si segano, o che si toccano al di fuori, o al di dentro non possono avere il centro di comune. Allorchè due cerchi distinti hanno un comun centro, si chiamano concentrici. 71—73

Angoli al centro, ed angoli iscritti. Nello stesso cerchio, o in cerchi eguali gli angoli al centro sono doppii degli angol' iscritti, co' quali poggiano sullo stesso arco, o su di archi eguali. Quindi tutti gli angoli iscritti in uno stesso segmento circolare sono eguali, ed essi sono misurati dalla metà dell'arco, su cui poggiano. 73—74

Gli angoli opposti di un quadrilatero iscritto nel cerchio sono eguali a due retti, Quindi il problema di far passare una circonferenza circolare per quattro punti non è capace di soluzione, se non quando uniti a due a due questi punti, gli angoli opposti riescono eguali a due retti. 75

L' angolo iscritto nel mezzo cerchio è retto; l' angolo iscritto in una porzione maggiore del semicerchio è acuto, ed è ottuso l' angolo iscritto nella porzione minore. Dunque se sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo si descriva un cerchio; la circonferenza dovrà passare pe 'l vertice dell' angolo. Metodo di descrivere il cerchio per assegnazione di punti. 75—76

Un angolo sarà misurato dalla metà delle somme di due archi, che tagliano i suoi lati prolungati, o della metà della loro differenza, secondocchè il suo vertice è ad un punto qualunque preso dentro del cerchio diverso dal centro, o è ad un punto preso fuori della circonferenza. 76—77

Tangente circolare. La perpendicolare elevata sul raggio dal punto, ove questo incontra le circonferenza, riesce tangente di essa nel medesimo punto. L' inversa è anche vera. 78—79

La perpendicolare elevata sulla tangente dal punto di contatto dovrà passare pe 'l centro del cerchio. Quindi se due cerchi si toccano internamente, o esternamente, il punto di contatto, ed i centri de' cerchi dovranno trovarsi sulla stessa retta. 79—80

Descrivere un cerchio tangente di un altro 80

Menare una tangente ad un cerchio tanto da un punto preso sulla circonferenza circolare, quanto da un punto preso fuori di essa. 80—81

Le tangenti, che si menano ad un cerchio da un punto preso fuori della sua cinconferenza sono eguali. 81

Il centro di un cerchio tangente i lati di un angolo dee trovarsi sulla retta, che bisega un tal angolo. Iscrizione del cerchio nel triangolo, e nel poligono regolare. Nel triangolo, e nel poligono regolare si può sempre iscrivere il cerchio. 82—83

Fra la circonferenza circolare, e la tangente non si può condurre veruna retta, che non interseghi la stessa circonferenza. Angolo del contatto; esso è il minimo di tutti gli angoli acuti rettilinei, il suo complemento è il massimo. 83

L' angolo compreso dalla tangente, e dalla corda menata dal punto di contatto è eguale all' angolo fatto nell' alterna porzione del cerchio. 84—85

L' angolo fatto dalla tangente, e da una corda ha per misura la metà dell' arco compreso tra suoi lati. 85

Il segmento circolare capace di un dato angolo è il luogo geometrico di tutti gli angoli eguali all' angolo dato. Quindi dato un angolo, ed una retta, ci è dato il segmento circolare capace del dato

angolo, e che poggia sulla retta data. Metodo di ritrovarlo geometricamente. 85—86

Assegnare il luogo geometrico di una serie di triangoli, i quali hanno una stessa base, e gli angoli al vertice eguali ad un angolo dato. 86

Dato un cerchio, e dato un angolo, tagliare dal cerchio un segmento capace del dato angolo. 87

Metodo, che si deduce da ciocchè si è premesso, per iscrivere in un cerchio un triangolo equiangolo ad un triangolo dato. 87—88

Dunque nel cerchio si può iscrivere qualunque triangolo, i cui angoli sono dati. Si dimostra parimente che si può al cerchio circoscrivere qualunque triangolo, i cui angoli siano dati. 88—90

Massime, e minime rette, che si menano nel cerchio da un punto qualunque. Il diametro è la massima di tutte le corde. La corda più vicina al centro è maggiore della più lontana; Le corde egualmente distanti dal centro sono eguali, ed all' opposto. 90—91

Adattare per corda in un cerchio una retta non maggiore del suo diametro. 91—92

In uno stesso cerchio due corde parallele tagliano archi eguali 92

Se da un punto preso nell' aja circolare, ma diverso dal centro, si menano più rette alla circonferenza, la massima sarà quella che passa pe'l centro, la minima la rimanente porzione del diametro; la più vicina alla massima sarà maggiore della più lontana, e da tal punto non si potranno menare, che a due a due le rette eguali 92—93

Di tutte le seganti, che si menano ad un cerchio da un punto preso fuori di esso, la massima è quella che passa pe'l centro, la minima quella che si arresta alla parte convessa della circonferenza, e che prolungata passarebbe pe'l centro; le più vicine alla massima sono maggiori delle più lontane; le più vicine alla minima sono minori delle più lontane, e da questo punto non si potranno menare che a due a due le rette eguali tanto nella parte concava del cerchio, quanto nella parte convessa. Idea del *limite* di due quantità. Due grandezze tendono sempre più a divenire eguali, quanto si accostano al loro limite. 93—96

Teorie sulle ragioni, e proporzioni, Se invece di paragonare le grandezze, per vedere quando sono eguali, generalizziamo le idee, ci si presenterà l' esame del seguente Problema „ due grandezze qua„ lunque della stessa specie qual rapporto hanno fra di loro rispetto „ alla quantità „? Un tal rapporto è numerico; quindi può conoscersi il rapporto di due quantità rispetto a due altre di diversa specie. Quel rapporto chiamasi ragione, e 'l numero che l' indica, si chiamasi *esponente*, o *quantità* di ragione. Ragione Geometrica, ed Aritmetica. In preferenza ci occupiamo della prima. 96—97

Due ragioni sono eguali, quando i loro esponenti sono eguali; e se l' esponente di una ragione sarà maggiore dell' esponente di un' altra, anche la prima ragione sarà maggiore di questa. L' eguaglianza di due ragioni dicesi *proporzione*. Proporzione continua, e discreta. 97—98

In ogni proporzione, se il primo termine è maggiore, eguale, o minore del secondo, anche il terzo sarà maggiore, eguale, o minore del quarto, e se il primo termine è maggiore eguale, o

minore del terzo, anche il secondo sarà maggiore, eguale, o minore del quarto: dunque se il primo termine è il massimo, l'ultimo sarà il minimo. 98

Due grandezze eguali hanno egual ragione ad una terza, e reciprocamente; e se due grandezze hanno egual ragione ad una terza, ed all'opposto, queste saranno eguali. 99

Di due grandezze diseguali, la maggiore serba alla terza maggior ragione, ed all'opposto la terza serba alla maggiore minor ragione. Quindi una grandezza sarà maggiore di un'altra, se avrà maggior ragione di questa ad una terza quantità; o pure se questa terza grandezza ha ad essa minor ragione, che all'altra. 99—100

Due ragioni eguali ad una terza sono eguali fra loro. 100

In ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini di mezzo. Quando due grandezze si dicono esser reciprocamente proporzionali a due altre. I prodotti eguali hanno i fattori reciprocamente proporzionali. 100—101

Trasformazione delle ragioni. Una proporzione non si altera, o che si alterni, o si inverta, o si componga, o si divida, o si converta. 101—103

Una ragione si dice composta di altre ragioni, se il suo esponente è eguale al prodotto degli esponenti di queste. Una ragione composta di più ragioni semplici si esibisce paragonando il prodotto degli antecedenti di queste al prodotto de' conseguenti. 103—104

Due ragioni, ed i loro esponenti sono nella ragion composta della diretta degli antecedenti, e dell'inversa de' conseguenti. 104

Due ragioni, delle quali una è inversa dell'altra, formano il carattere d'eguaglianza di due grandezze, che sono tra loro nella ragion composta di esse. 104

Se i termini di una ragione si moltiplichino, o si dividano per una stessa grandezza, la ragione non si altera. Quindi i prodotti, che hanno un fattore di comune, sono nella ragione degli altri fattori. 105

Se tra due grandezze s' insinuano un numero qualunque di altre grandezze omogenee; la ragione della prima all' ultima sarà maggiore della ragione delle intermedie. Ragione duplicata, e triplicata. Generalmente se un numero $n+1$ di grandezze omogenee sono continuamente proporzionali, la prima all' ultima sarà in ragione nmplicata della prima alla seconda, della seconda alla terza ec. 105—106

Serie di grandezze in ragion ordinata, e perturbata. Se una serie di grandezze è in ragione ordinata, o perturbata di un altra serie, la prima, ed ultima di ambedue le serie formeranno una proporzione. 106—107

Le ragioni, ed i loro esponenti, che hanno gli stessi antecedenti sono nell' inversa de' loro conseguenti; e quelle che hanno gli stessi conseguenti sono nella diretta de' loro antecedenti. 107—108

In due serie di grandezze, che sono tra loro in ragione ordinata, se la prima è eguale, maggiore, o minore dell' ultima nella prima serie, anche nella seconda serie sarà la prima eguale, maggiore, o minore dell' ultima 108

Se si hanno quattro grandezze tali, che due sono proporzionali agli antecedenti di una proporzione, e due à conseguenti, queste saranno parimente proporzionali. 108—109

In due serie di grandezze, che sono in ragione ordinata, la prima serie è all' ultima grandezza, che forma parte di essa, com' è la seconda serie all' ultima sua quantità. 109

Se tra grandezze omogenee vi sono più ragioni eguali, sarà la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come un antecedente è al suo conseguente. 109—100

Se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, sarà la somma, o la differenza degli antecedenti delle prime ragioni alla somma, o differenza degli antecedenti delle seconde come i conseguenti comuni. 100

Se due grandezze sono proporzionali a due di loro parti, le stesse grandezze saranno proporzionali alle rimanenti parti. 100—111

In ogni proporzione, in cui il primo termine è il massimo, la somma della massima, e minima grandezza sarà maggiore della somma delle altre due. 111

I parallelogrammi, ed i triangoli che hanno le stesse altezze sono in ragion delle basi, e quelli che hanno basi eguali sono in ragione delle altezze. 111—114

I parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno diseguali basi, ed altezze sono in ragion composta delle basi, e delle altezze, e se hanno un angolo eguale, sono in ragion composta de' lati intorno gli angoli eguali. 114—115

I parallelogrammi, ed i triangoli equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, ed all' opposto, e se hanno un angolo eguale, hanno i lati intorno di quest' angolo reciprocamente proporzionali, ed all' opposto. 115—117

Se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo contenuto dall' estreme è eguale a quello fatto dalle medie; l' inversa è anche vera. 117—118

Se in un triangolo si mena una retta parallela ad un lato, gli altri lati resteranno divisi proporzionalmente; ed all' opposto. 118—119

Se in un triangolo da varj punti presi in uno de' suoi lati si menino delle parallele ad un lato, queste divideranno l' altro lato in parti, che avranno ragione ordinata alle parti del primo. 119—120

Dividere una retta in parti proporzionali a quelle di un' altra retta. 120

Dato un punto dentro un angolo, menare una retta da questo punto, in modocchè le parti di essa intercette tra il dato punto, ed i lati dell' angolo, rispettivamente siano eguali. 120

Data una retta, si cerca dividerla in un numero qualunque di parti eguali. 120—121

Tagliare da una retta una qualsivoglia parte. 121—122

Trovare in ordine a tre rette date una quarta proporzionale. 122

Costruire su di una retta data un rettangolo eguale ad un dato rettangolo. 122

Trovare in ordine a due rette date una terza proporzionale. 123

Su di una retta costruire un rettangolo eguale ad un quadrato. 122—123

Se un angolo di un triangolo si divida per metà, il lato opposto a tal angolo resterà diviso dalla medesima bisegante in parti proporzionali à rimanenti lati, ed all' opposto. 123—124

Figure simili. I triangoli equiangoli sono simili. 124—125

I poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili. 125 — 126

I perimetri de' poligoni simili sono fra loro come i lati omologhi. Quindi i perimetri de' poligoni regolari simili sono fra loro come due lati qualunque. 126

I perimetri de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono fra loro come i raggi de' cerchi circoscritti, o iscritti. 127

Due triangoli rettangoli sono simili, allorchè hanno un angolo acuto eguale. 127 — 128

Se dal vertice dell' angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassi sull' ipotenusa una perpendicolare, il triangolo rettangolo dato resterà diviso in due altri triangoli rettangoli simili tra loro, e simili al dato. Dunque abbassata dall' angolo retto di un triangolo rettangolo la perpendicolare sull' ipotenusa, ogni catetto è medio proporzionale tra l' intiera ipotenusa, è segmento adjacente; e la perpendicolare è media proporzionale fra i due segmenti dell' ipotenusa. 128

Quindi in ogni triangolo rettangolo, i quadrati de' catetti sono tra loro come i segmenti adjacenti ad essi, tagliati dalla perpendicolare, che si abbassa sull' ipotenusa dal vertice dell' angolo retto. Queste stesse proprietà hanno luogo nel semicerchio. 128 — 129

Ritrovare tra due rette una media proporzionale. 129

Costruire un rettangolo eguale ad un dato quadrato, in modo però che i due lati del rettangolo facciano una somma, la cui metà non sia minore del lato del quadrato. 129 — 130

Dato un quadrato, ed una ragione, costruire un altro quadrato, che sia al dato nella data ragione. 130 — 131

Le rette parallele, che tagliano più rette, le quali partano da un punto, sono da queste tagliate proporzionalmente. 132

Sono simili i triangoli, che hanno un angolo eguale, ed i lati intorno di esso proporzionali. 132

Sono simili due triangoli, allorchè i lati sono perpendicolari l' uno all' altro. 132 — 133

Sono simili i triangoli, che hanno i lati proporzionali. 133 — 134

Sono simili due triangoli, allorchè hanno due lati proporzionali a due lati, e degli angoli non compresi da questi lati, due eguali, e due della stessa specie. 134 — 135

I triangoli simili sono fra loro come i quadrati de' lati omologhi. 135

Su di una data retta costruire un poligono simile ad un poligono dato 135 — 137

I poligoni simili sono composti di un egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno. 137

Le superficie de' poligoni simili sono tra loro come i quadrati de' lati omologhi: quindi le superficie de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono tra loro come i quadrati di due lati di essi, e perciò come i quadrati de' raggi de' cerchi circoscritti, o iscritti: modo di esprimere la ragione di due poligoni per mezzo della ragione di due rette. 137 — 138

Il poligono descritto sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma de' poligoni simili, che si descrivono su cateti: 138 — 139

Costruire un poligono simile a due poligoni dati, che si suppongono parimente simili, ed eguale alla loro somma, o differenza. 139—140

Costruire un poligono simile ad un poligono dato, e che stia a questo nella data ragione. 140—141

Costruire un poligono simile ad un poligono dato, ed eguale ad un altro. 141—142

Costruire un poligono nnesimo, o nnecuplo di un poligono dato. 142

Sono simili i parallelogrammi, che hanno un angolo eguale, ed i lati intorno di quest' angolo proporzionali. 142—143

I parallelogrammi esistenti intorno la diagonale di un altro parallelogrammo sono simili tra loro, e simili all' intiero parallelogrammo, di cui fanno parte. 143—144

I parallelogrammi simili, che hanno un angolo di comune, sono intorno la medesima diagonale. 144

Se due corde si segano in un cerchio, le parti di una saranno reciprocamente proporzionali alle parti dell' altra. Quindi il rettangolo fatto delle parti di una è eguale al rettangolo delle parti dell' altra. 144—145

Se due rette si segano in modocchè le parti di una riescano reciprocamente proporzionali alle parti dell' altra, il cerchio, che passerà per tre estremi di queste rette, passerà ancora pe 'l quarto 145

Se due rette, che segano il cerchio, s' incontrano fuori di esso le intiere seganti saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne. 146

Se da un punto fuori del cerchio si meni una tangente, ed una segante al cerchio, la tangente sarà media proporzionale tra l' intiera segante, e la sua porzione esterna: Quindi il rettangolo fatto dalla segante nella porzione esterna è eguale al quadrato della tangente. 146—147

Se da un punto fuori del cerchio si meni a questo una segante, ed una retta, che l' incontra, in modocchè questa sia media proporzionale tra l' intiera segante, e la porzione esterna, una tal retta sarà tangente al cerchio. 147

Dividere una retta in estrema, e media ragione. 147—148

Costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascun angolo alla base doppio dell' angolo al vertice. La parte maggiore di una retta divisa in estrema e media ragione è la base di un tal triangolo. 148—149

Divisione dell' angolo retto in cinque parti eguali. Si dimostra 1. che un poligono equilatero è anch' equiangolo, ed in conseguenza regolare; 2. che il problema dell' iscrizione de' poligoni regolari nel cerchio dipende dalla divisione in parti eguali dell' angolo retto, e che generalmente si può nel cerchio iscrivere un poligono regolare di tanti lati, quante sono le parti eguali, nelle quali possiamo dividere l' angolo retto. 149—150

Si può dunque nel cerchio iscrivere il pentagono regolare, e quindi il decagono, ec.; il quadrato, e quindi l' ottagono ec.; il triangolo equilatero, e quindi l' esagono ec., il dodecagono ec.. il quindecagono, e quindi la figura regolare di 30. lati, ec. Si può anche, secondo Gaus, iscrivere nel cerchio la figura regolare di 17. lati, il

poligono regolare di $2n+1$ di lati, quando $2n+1$ è un numero primo. 150—152

Iscrizione del quadrato nel cerchio. 152—153

Iscrizione del decagono nel cerchio, e del pentagono. 153—155

Iscrizione dell' esagono nel cerchio. Il lato dell' esagono regolare è eguale al raggio. 155

Iscrizione del quindecagono nel cerchio. 155—156

Al cerchio non si può circoscrivere che un poligono possibile ad essere iscritto. Circoscrizione al cerchio di un poligono regolare possibile ad essere iscritto. 156—158

Il lato del poligono circoscritto simile all' iscritto è una quarta proporzionale in ordine all' apotema del poligono iscritto, al raggio del cerchio, ed al lato dello stesso poligono iscritto. Il problema di circoscrivere, o iscrivere un cerchio in un dato poligono regolare è capace di una soluzione generale: non così il problema opposto. 158

Dato il lato di un poligono iscritto, 'l raggio del cerchio, ritrovare l' apotema. 158—159

Dato il raggio di un cerchio, e 'l lato del poligono iscritto, si domanda ritrovare il lato del poligono regolare di doppio numero di lati: Metodo di esaustione. 159—160

Le circonferenze de' cerchi sono tra loro come i raggi. 160

I cerchi sono tra loro come i quadrati de' raggi. Descrivere un cerchio, che sia nnesimo, o nnecuplo di un cerchio dato. Descrivere un cerchio eguale alla somma, o alla differenza di due cerchi dati. Lunule d' Ippocrate. 160—162

L' aja del cerchio approssimativamente è eguale ad un rettangolo, che ha per base la sua circonferenza, e per altezza la metà del raggio. Quadratura del cerchio. 162

Si assegna il metodo di valutare la circonferenza in parti del raggio. Rapporto Archimedeo della circonferenza al diametro; rapporto di Mezio. Espressione di un cerchio, di cui il raggio è noto 162—166

Gli angoli sono nella ragione degli archi, su' quali poggiano, descritti con eguali raggi. 166—168

I Settori in cerchi eguali sono nella ragione degli archi, su quali poggiano. 168—169

Ogni Settore è all' intiero cerchio, come l' arco, su cui esso poggia è all' intiera circonferenza. 169

L' aja di un Settore circolare è eguale ad un rettangolo dell' arco, su cui poggia, per la metà del raggio. 169—170

L' aja di un segmento circolare è eguale ad un rettangolo della metà del raggio del cerchio, cui appartiene, per la differenza tra l' arco, su cui poggia, e la corda corrispondente. 170

Ogni angolo è a quattro retti, come l' arco su cui poggia è all' intiera circonferenza. 170

Gli archi che riguardano angoli eguali appartenenti a due circonferenze qualunque sono proporzionali alle intiere circonferenze. Questi si dicono simili. L' inversa è vera. 170—141

I Settori limitati da raggi, che comprendono angoli sono proporzionali agli intieri cerchi, de' quali fanno parte. L' inversa è vera. 170—171

I Settori simili sono come i quadrati de' raggi de' cerchi, à quali appartengono. 172

I segmenti simili sono tra loro come i quadrati de' raggi appartenenti a cerchi, de' quali fanno parte. Quindi i Settori, i segmenti simili, ed i cerchi, a' quali essi appartengono hanno tra loro ragion d'eguaglianza. 172— 174

Gli angoli non sono misurati dalla lunghezza degli archi, ma dal numero de' gradi. 173— 173

Se tra lati di due angoli disuguali co' loro vertici per centri, e con raggi disuguali si descrivano due archi, quegli angoli saranno in ragion composta della diretta degli archi. e dell' inversa de' raggi degli cerchi. 174

Alcuni facili Problemi Geometrici per esercizio de' Giovanetti. 175— 183

Geometria Piana Tav. I.
"VITTORIO EMANUELE III" - BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

32
39
47
48

51
55
58
59
64